# MATEMATIKAI STATISZTIKA elemei

Dr. Kausay Tibor

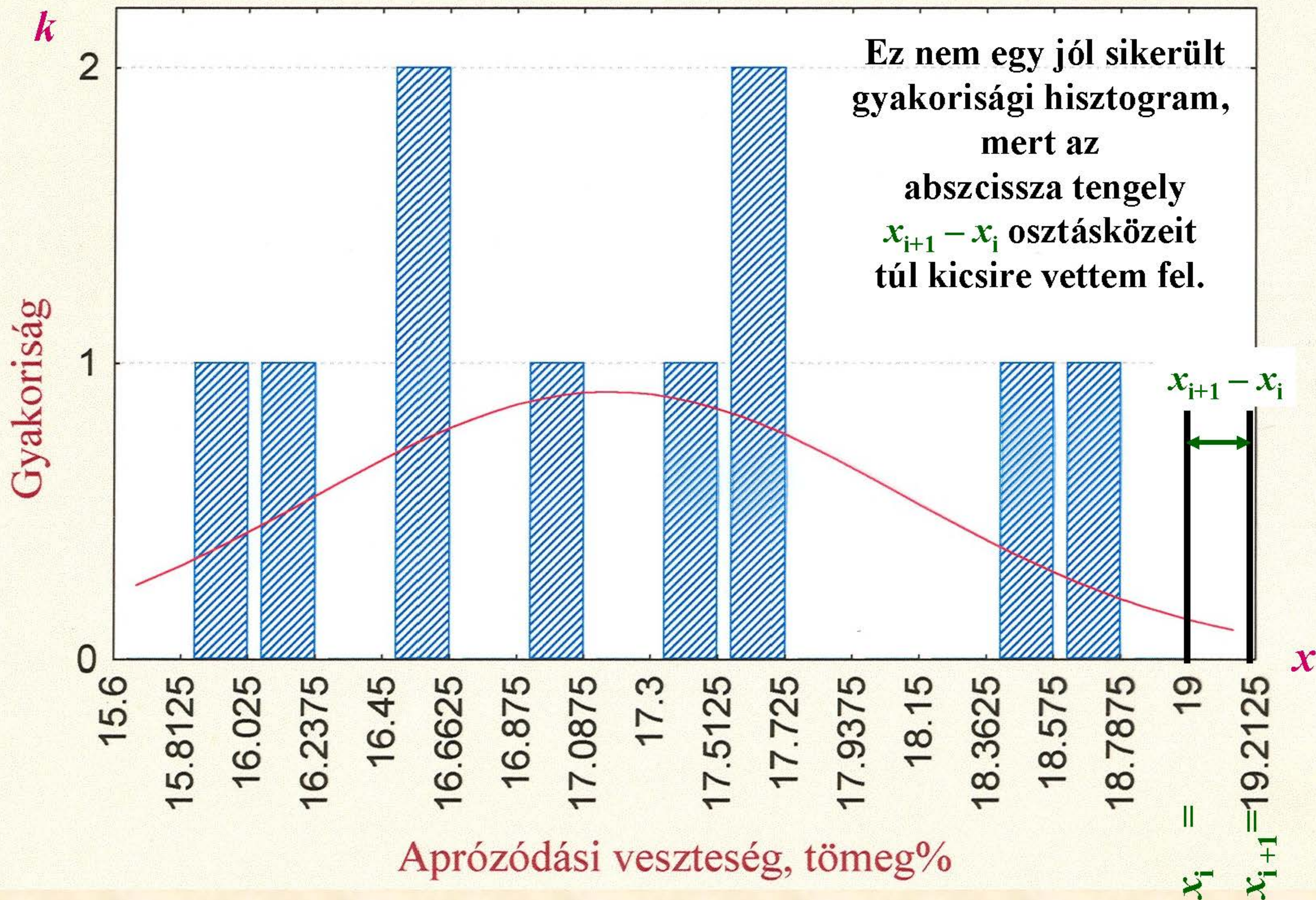
Budapest, 2012. február

PÉLDA A GYAKORISÁG-FÜGGVÉNY SZERKESZTÉSÉRE

# Los Angeles aprózódási veszteség [tömeg%]

| Minta | Rendezett minta |
|---|---|
| 16,5 | 15,9 |
| 17,7 | 16,1 |
| 16,1 | 16,5 |
| 18,6 | 16,6 |
| 17,4 | 16,9 |
| 15,9 | 17,4 |
| 17,7 | 17,7 |
| 18,4 | 17,7 |
| 16,6 | 18,4 |
| 16,9 | 18,6 |

# Los Angeles aprózódás mérési eredmények normál (Gauss) görbéje



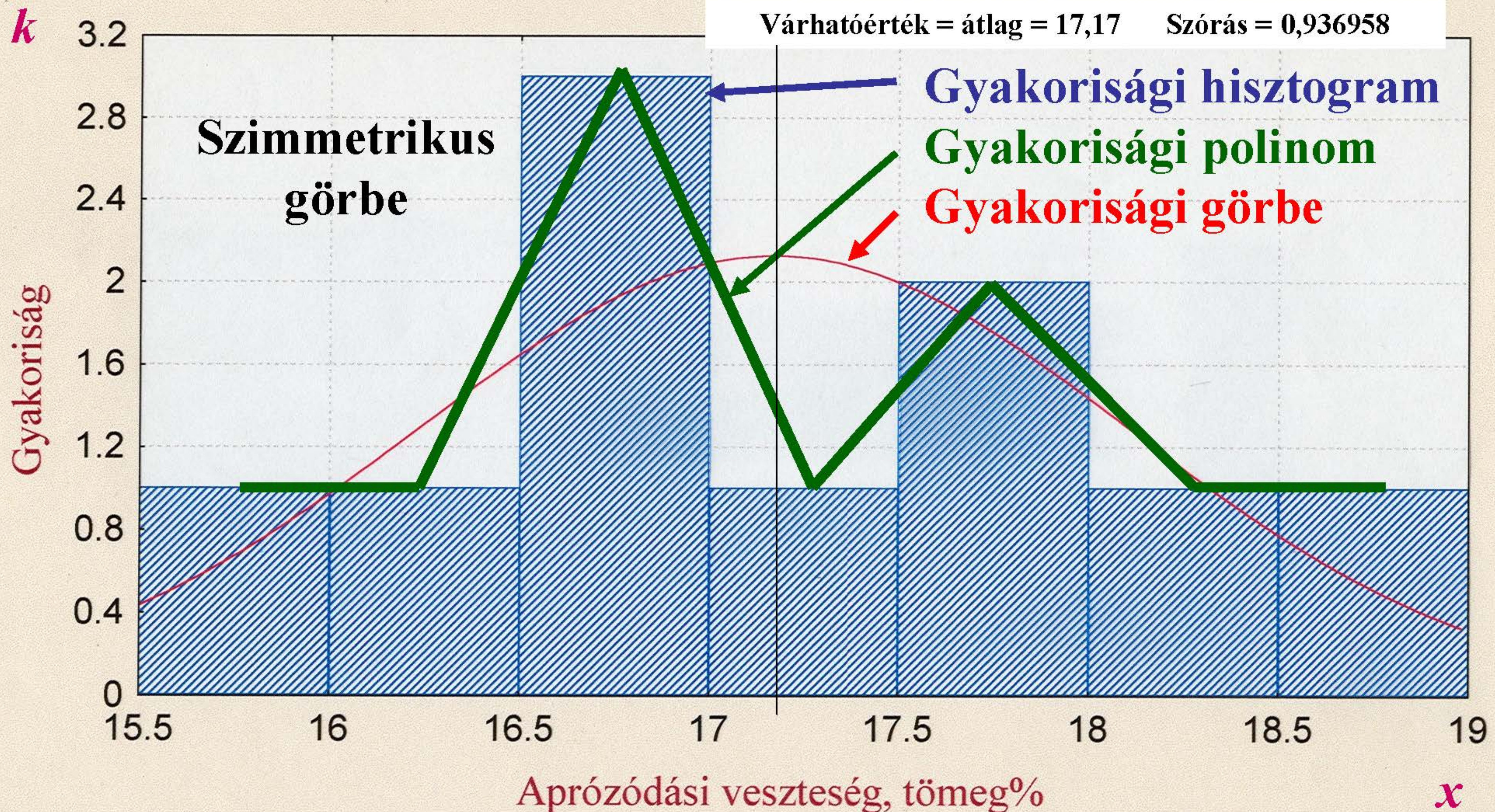
**Az $x$ abszcissza tengely felosztására nincs pontos szabály, de az osztáspontok megválasztása általában akkor szerencsés, ha minden $x_{i+1} - x_i$ intervallumba körülbelül**

$$\sqrt[3]{n}$$

**mintaelem jut, ahol $n$ a mintaelemek száma.**

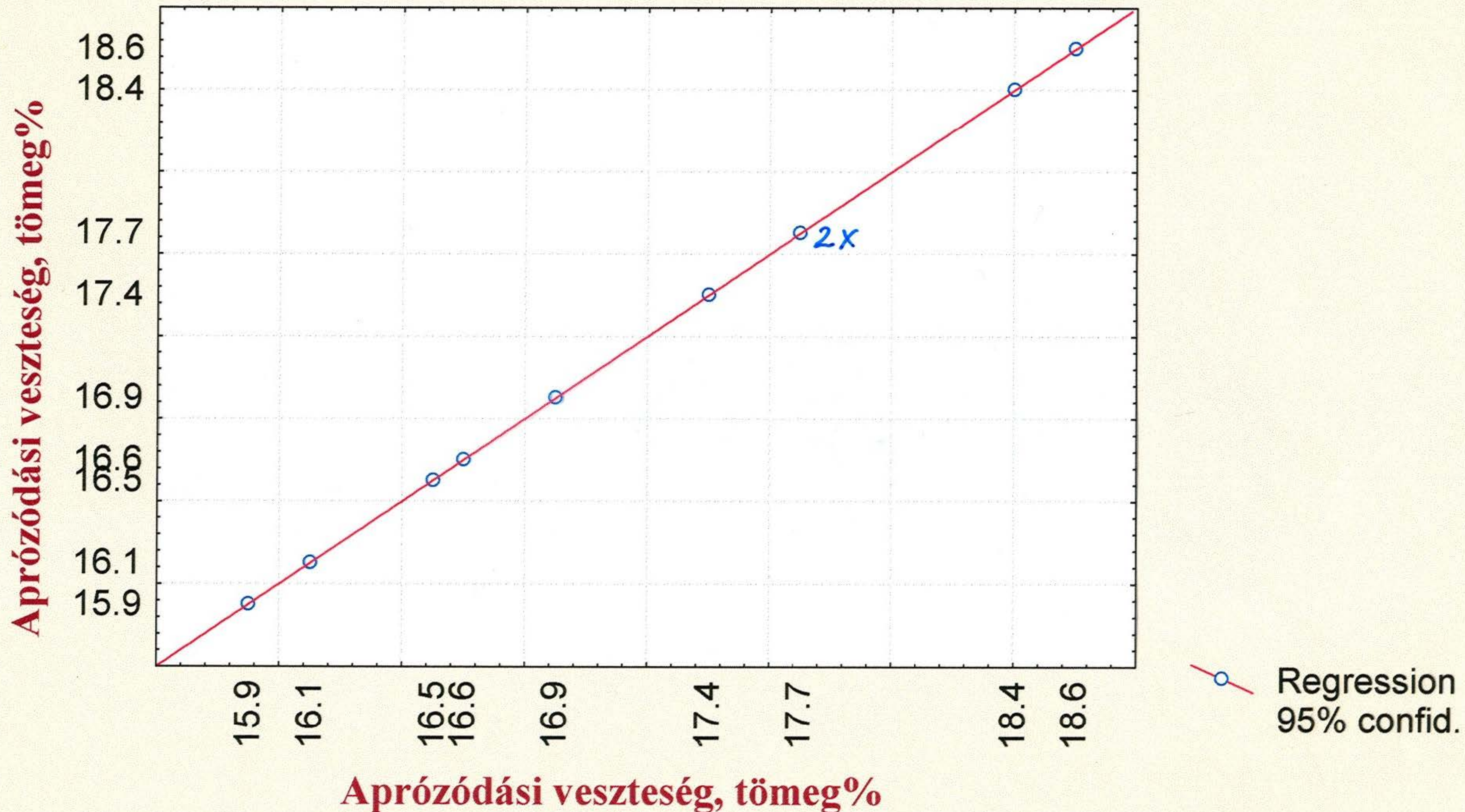
**Példánk esetén az elemek száma $n$ = 10, és ideális esetben $\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{10} = 2{,}154$ elem jut egy intervallumba. A 19,0 – 15,5 = 3,5 terjedelmet tehát $n$/2,154 = 10/2,154 = = 4,6 ~ 5 intervallumra a legcélszerűbb osztani.**

**Ehhez igazodva az új ábrán 7 darab $x_{i+1} - x_i$ = 0,5 terjedelmű intervallumot alkalmaztunk.**

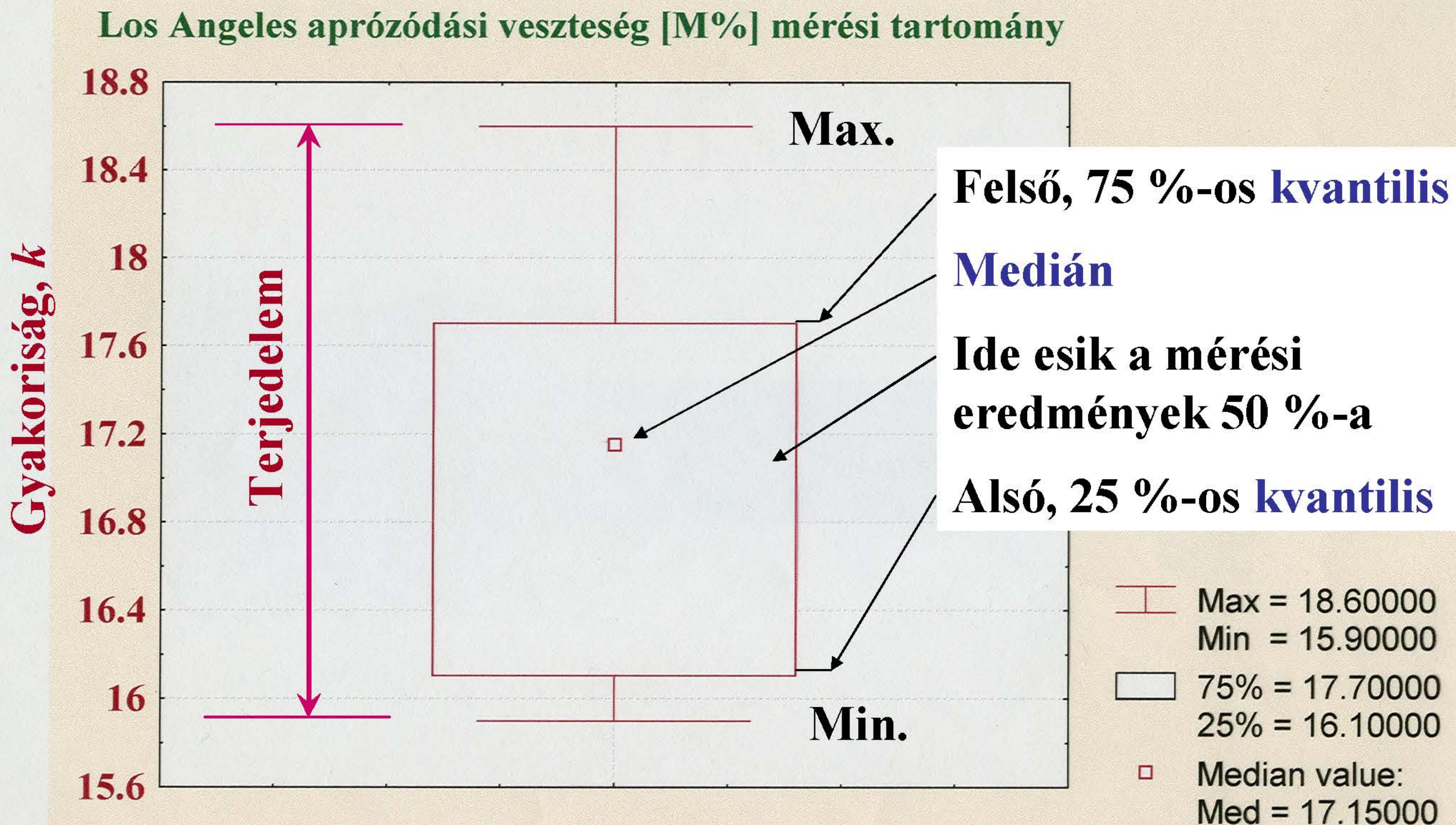



**Ez a gyakorisági hisztogram már jobban néz ki, mert az abszcissza tengely $x_{i+1} - x_i$ osztásközei nagyobbak, mint az előző ábrán voltak.**

**Ez az ábra a gyakorisági ábra „felülnézeteként” értelmezhető. Az ábra nagyon jól szemlélteti, hogy a mérési eredmények elhelyezkedése az abszcissza tengelyen *nem szimmetrikus*.**

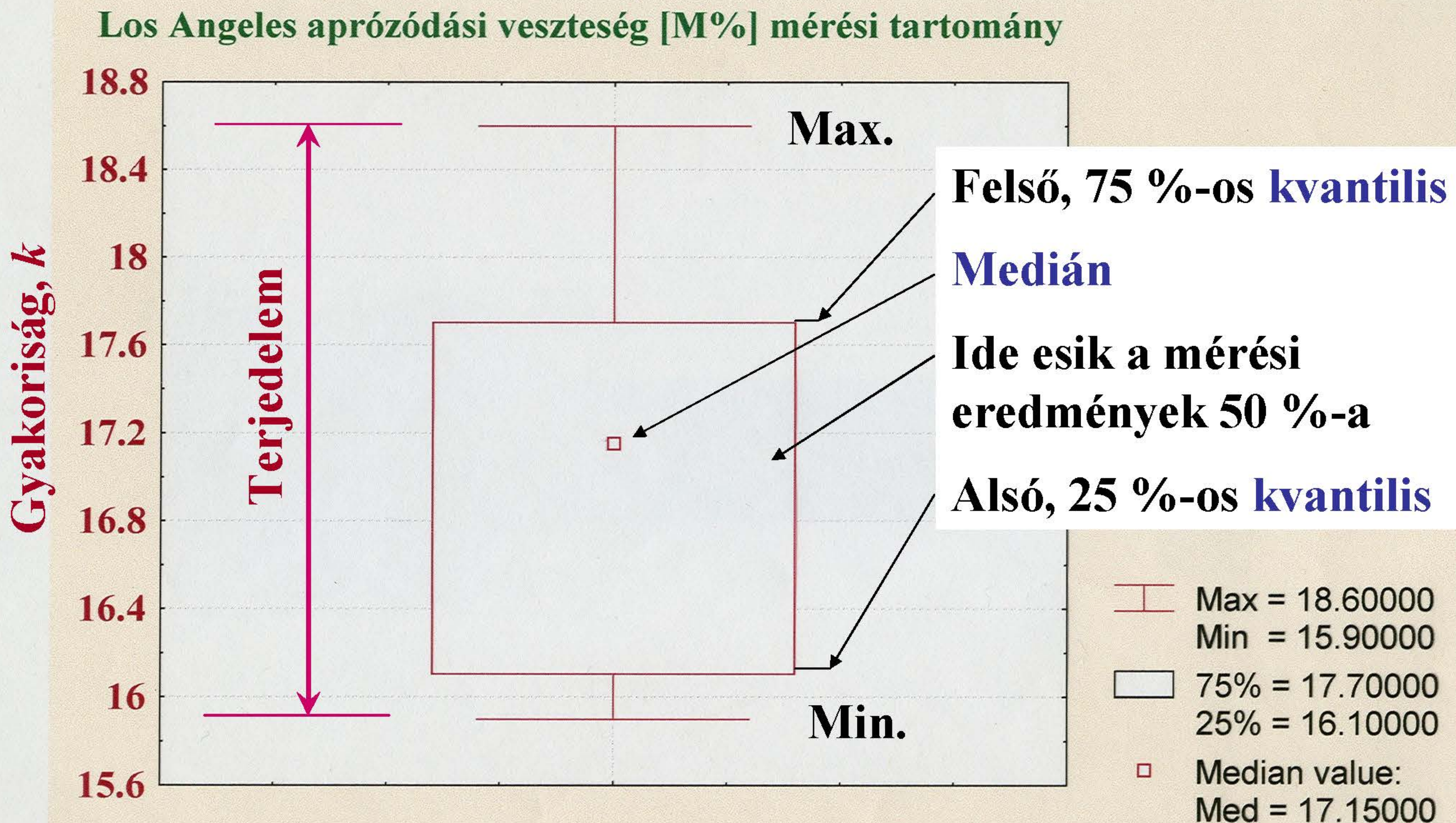


# Ez az ábra is a gyakorisági ábra „felülnézeteként” értelmezhető




**Medián** = **Az *50 %-os kvantilis* neve, illetve értéke. A páratlan számú rendezett minta esetén a középső elem értéke, a páros számú esetén a két középső elem átlagértéke.**

# Ez az ábra is a gyakorisági ábra „felülnézeteként" értelmezhető




Medián = Az *50 %-os kvantilis* neve, illetve értéke. A páratlan számú rendezett minta esetén a középső elem értéke, a páros számú esetén a két középső elem átlagértéke.

**Ha a *k* tapasztalati gyakorisági értékeket elosztjuk a mintaelemek *n* számával (ez példánk esetén $n = 10$ volt), akkor a $p' = k/n$ tapasztalati relatív gyakoriságokat kapjuk.**

**Az ordináta tengelyre a $p' = k/n$ tapasztalati relatív gyakoriságokat felrakva a tapasztalati eloszlásfüggvényre, más néven tapasztalati sűrűségfüggvényre ($p'$) jutunk.**

**A sűrűségfüggvény alatti terület értéke 1,0, vagy százalékban kifejezve 100 %.**

**A $p'$ sűrűségfüggvény egyes $x_i$ abszcissza értékeitől balra vett görbe alatti területek értékét koordinátarendszerbe felhordva a (tapasztalati) *p* eloszlásfüggvényt kapjuk.**

# Eloszlásfüggvény és jellemzői
## (az MSZ 18288-5:1981 szabvány szerint)

Egyenlőtlenségi együttható:

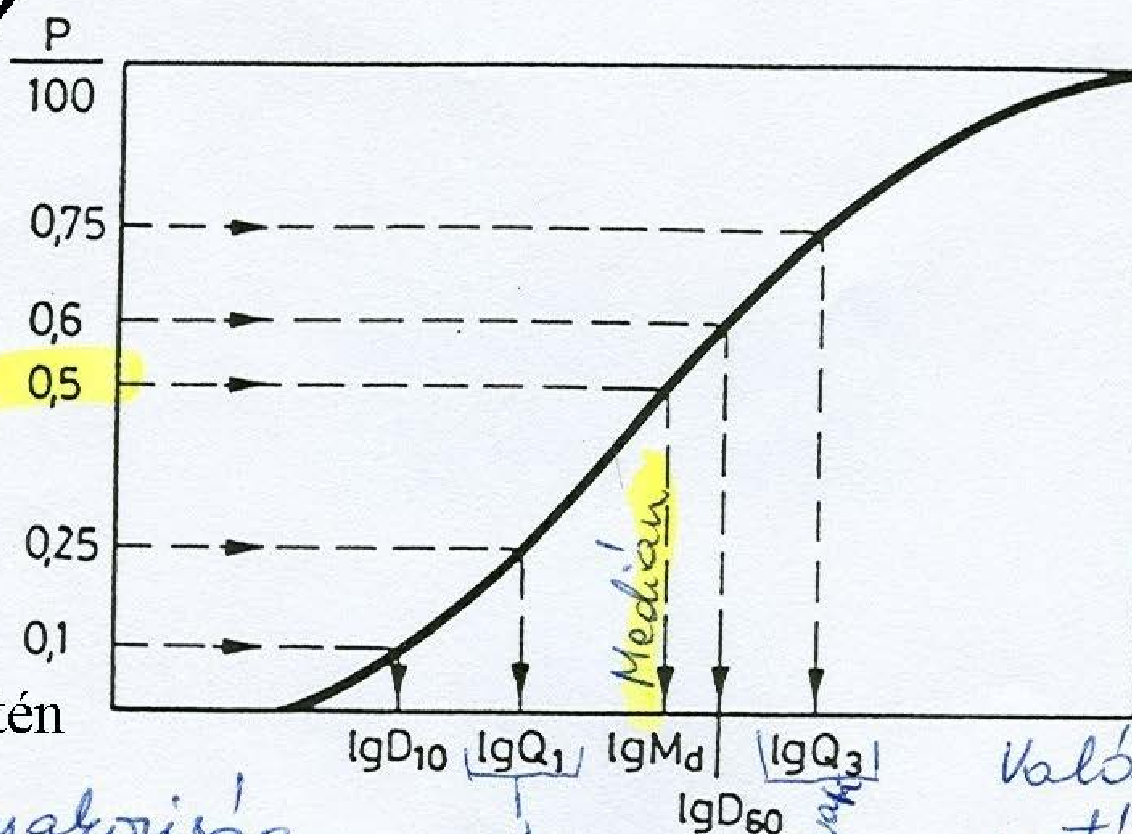
$$u_{60} = \frac{D_{60}}{D_{10}}$$

kőanyag szemhalmazok esetén általában

vagy

$$u_{70} = \frac{D_{70}}{D_{10}}$$

adalékanyagok esetén




Osztályozottsági érték:

$$DQ_g = \sqrt{\frac{Q_3}{Q_1}}$$

Asszimetria érték:

$$SK_g = \sqrt{\frac{Q_1 \times Q_3}{M_d^2}}$$

Módusz = A gyakoriság függvény legnagyobb értékéhez tartozó valószínűségi változó.

Valószínűség eloszlás esetén a tengely beosztás lineáris

**Valahol olvastam:** **A brüsszeli városvezetés a Brüsszelben élő *Carl Friedrich Gauss* német matematikust felkérte arra, hogy végezzen matematikai módszerrel lakossággal kapcsolatos felmérést. Könnyen lehetséges az, hogy a világ első ilyen felmérése született *Gauss* módszerével, és talán Brüsszel városa volt az első, aki megbízást adott a tudományos megalapozottságot igénylő munkára.**

***Gauss*** **Brüsszel lakosait kirendeltette a templom előtti térre, és ott a toronyból irányítva nagyságrend alapján rendezte őket, mégpedig úgy, hogy középen a legmagasabbak és két oldalra csökkenő magasságúakat állította. Így alakult ki a *Gauss* görbe, mely harang alakú. Ebből a görbéből számításokkal meghatározta, hogy a lakosságnak hány %-a nagyon alacsony, alacsony középméretű, magasabb és igen magas.**



**Carl Friedrich Gauss**
**német matematikus portréja**
**(*Gottlieb Biermann* festménye, 1887)**

**Született:**
**Német-római Birodalom, Braunschweig-Lüneburgi hercegség, Braunschweig, 1777. április 30.**

**Meghalt:**
**Hannoveri Királyság, Göttingen, 1855. február 23.**

**Forrás: Wikipédia**

DG7678836U6

Deutsche Bundesbank

Frankfurt am Main
1.Oktober 1993




**A német márkát 2001. december 31-én kivonták a forgalomból, mert 2002. január 1-én az euro lett a fizetőeszköz Németországban.**

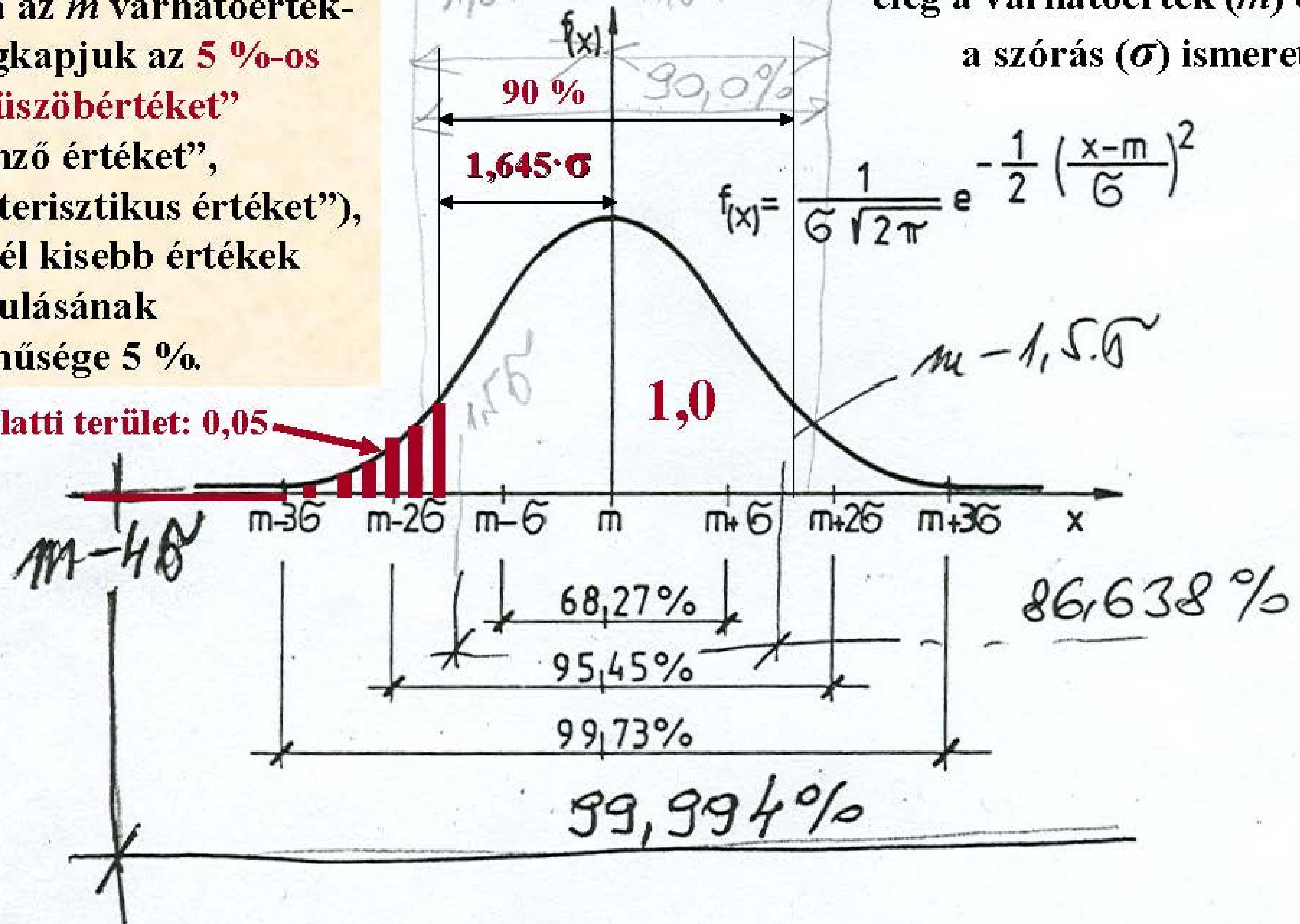
**Tessék megfigyelni a pénzen a *Gauss*-görbét és egyenletét.**

**Ezt a példányt 2001. június 19-én vásároltam az OTP-ben:**

| PÉNZNEM /Currency/ | VALUTA/CSEKK ÖSSZEG /FX Amount/ | ÁRFOLYAM * /Exchange rate/ | FORINT ELLENÉRTÉK /HUF equvivalent/ |
|---|---|---|---|
| DEM | 10,00 | 129,18 | 1.292 |

**A $\sigma$ szórás 1,645-szeresét levonva az *m* várhatóérték-ből megkapjuk az 5 %-os alsó „küszöbértéket" („jellemző értéket", „karakterisztikus értéket"), amelynél kisebb értékek előfordulásának valószínűsége 5 %.**

**A *Gauss* függvény megadásához elég a várhatóérték (*m*) és a szórás ($\sigma$) ismerete.**




Normális (Gauss-sűrűségfüggvény)

Éltető – Ziermann: Matematikai statisztika

# TÁBLÁZATOK

**1. táblázat**

Eloszlás fv.: $A\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ függvény értékeinek táblázata ha $u = x - m$ és $\sigma = 1$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | Valósz. szint |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,5000 | 0,44 | 0,6700 | 0,88 | 0,8106 | 1,32 | 0,9066 | |
| 0,01 | 0,5040 | 0,45 | 0,6736 | 0,89 | 0,8133 | 1,33 | 0,9082 | |
| 0,02 | 0,5080 | 0,46 | 0,6772 | 0,90 | 0,8159 | 1,34 | 0,9099 | |
| 0,03 | 0,5120 | 0,47 | 0,6808 | 0,91 | 0,8186 | 1,35 | 0,9115 | |
| 0,04 | 0,5160 | 0,48 | 0,6844 | 0,92 | 0,8212 | 1,36 | 0,9131 | |
| 0,05 | 0,5199 | 0,49 | 0,6879 | 0,93 | 0,8238 | 1,37 | 0,9147 | |
| 0,06 | 0,5239 | 0,50 | 0,6915 | 0,94 | 0,8264 | 1,38 | 0,9162 | |
| 0,07 | 0,5279 | 0,51 | 0,6950 | 0,95 | 0,8289 | 1,39 | 0,9177 | |
| 0,08 | 0,5319 | 0,52 | 0,6985 | 0,96 | 0,8315 | 1,40 | 0,9192 | |
| 0,09 | 0,5359 | 0,53 | 0,7019 | 0,97 | 0,8340 | 1,41 | 0,9207 | |
| 0,10 | 0,5398 | 0,54 | 0,7054 | 0,98 | 0,8365 | 1,42 | 0,9222 | |
| 0,11 | 0,5438 | 0,55 | 0,7088 | 0,99 | 0,8389 | 1,43 | 0,9236 | |
| 0,12 | 0,5478 | 0,56 | 0,7123 | 1,00 | 0,8413 | 1,44 | 0,9251 | |
| 0,13 | 0,5517 | 0,57 | 0,7157 | 1,01 | 0,8438 | 1,45 | 0,9265 | |
| 0,14 | 0,5557 | 0,58 | 0,7190 | 1,02 | 0,8461 | 1,46 | 0,9279 | |
| 0,15 | 0,5596 | 0,59 | 0,7224 | 1,03 | 0,8485 | 1,47 | 0,9292 | |
| 0,16 | 0,5636 | 0,60 | 0,7257 | 1,04 | 0,8508 | 1,48 | 0,9306 | |
| 0,17 | 0,5675 | 0,61 | 0,7291 | 1,05 | 0,8531 | 1,49 | 0,9319 | |
| 0,18 | 0,5714 | 0,62 | 0,7324 | 1,06 | 0,8554 | 1,50 | 0,9332 | 86,64 |
| 0,19 | 0,5753 | 0,63 | 0,7357 | 1,07 | 0,8577 | 1,51 | 0,9345 | |
| 0,20 | 0,5793 | 0,64 | 0,7389 | 1,08 | 0,8599 | 1,52 | 0,9357 | |
| 0,21 | 0,5832 | 0,65 | 0,7422 | 1,09 | 0,8621 | 1,53 | 0,9370 | |
| 0,22 | 0,5871 | 0,66 | 0,7454 | 1,10 | 0,8643 | 1,54 | 0,9382 | |
| 0,23 | 0,5910 | 0,67 | 0,7486 | 1,11 | 0,8665 | 1,55 | 0,9394 | |
| 0,24 | 0,5948 | 0,68 | 0,7517 | 1,12 | 0,8686 | 1,56 | 0,9406 | |
| 0,25 | 0,5987 | 0,69 | 0,7549 | 1,13 | 0,8708 | 1,57 | 0,9418 | |
| 0,26 | 0,6026 | 0,70 | 0,7580 | 1,14 | 0,8729 | 1,58 | 0,9429 | |
| 0,27 | 0,6064 | 0,71 | 0,7611 | 1,15 | 0,8749 | 1,59 | 0,9441 | |
| 0,28 | 0,6103 | 0,72 | 0,7642 | 1,16 | 0,8770 | 1,60 | 0,9452 | |
| 0,29 | 0,6141 | 0,73 | 0,7673 | 1,17 | 0,8790 | 1,61 | 0,9463 | |
| 0,30 | 0,6179 | 0,74 | 0,7703 | 1,18 | 0,8810 | 1,62 | 0,9474 | |
| 0,31 | 0,6217 | 0,75 | 0,7734 | 1,19 | 0,8830 | 1,63 | 0,9484 | |
| 0,32 | 0,6255 | 0,76 | 0,7764 | 1,20 | 0,8849 | 1,64 | 0,9495 | |
| 0,33 | 0,6293 | 0,77 | 0,7794 | 1,21 | 0,8869 | 1,65 | 0,9505 | 95,00 |
| 0,34 | 0,6331 | 0,78 | 0,7823 | 1,22 | 0,8888 | 1,66 | 0,9515 | |
| 0,35 | 0,6368 | 0,79 | 0,7853 | 1,23 | 0,8907 | 1,67 | 0,9525 | |
| 0,36 | 0,6406 | 0,80 | 0,7881 | 1,24 | 0,8925 | 1,68 | 0,9535 | |
| 0,37 | 0,6443 | 0,81 | 0,7910 | 1,25 | 0,8944 | 1,69 | 0,9545 | |
| 0,38 | 0,6480 | 0,82 | 0,7939 | 1,26 | 0,8962 | 1,70 | 0,9554 | |
| 0,39 | 0,6517 | 0,83 | 0,7967 | 1,27 | 0,8980 | 1,71 | 0,9564 | |
| 0,40 | 0,6554 | 0,84 | 0,7995 | 1,28 | 0,8997 | 1,72 | 0,9572 | |
| 0,41 | 0,6591 | 0,85 | 0,8023 | 1,29 | 0,9015 | 1,73 | 0,9582 | |
| 0,42 | 0,6628 | 0,86 | 0,8051 | 1,30 | 0,9032 | 1,74 | 0,9591 | |
| 0,43 | 0,6664 | 0,87 | 0,8078 | 1,31 | 0,9049 | 1,75 | 0,9599 | 91,98 |

Valószínűségi szint %-ban $= 100(2\Phi - 1)$

mert: $100\{1-(1-\Phi)\times 2\} = 100(1-2+2\Phi)$

91,98 → azaz alul is felül is 4,01 % mert $\frac{100-91,98}{2}$

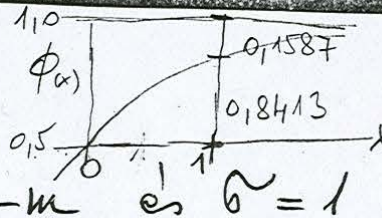
**1,645×σ esete:**

$100 - 95 = 5\,\%$ (Δ)

$2\times 5 = 10$

$\frac{10}{100} = 0,1$

$1 - 0,1 = 0,9$




**1σ esete**

$1 - 0,8413 = 0,1587$

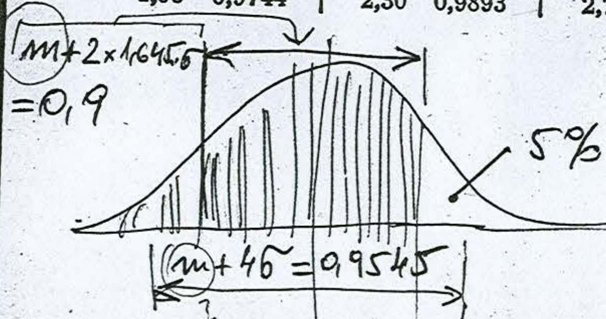
Lefelé szimmetrikus, ezért

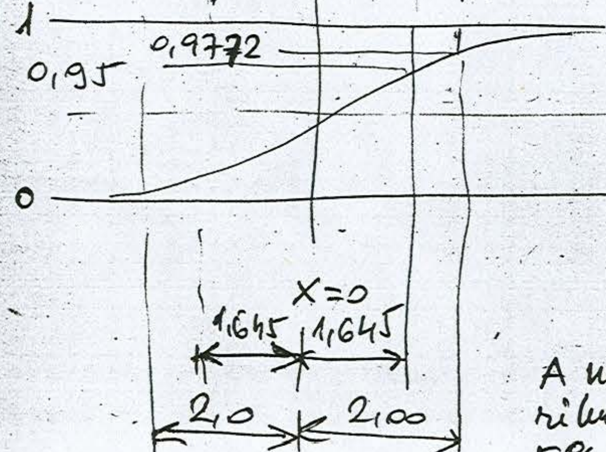
$2\times 0,1587 = 0,3174 = 31,74\,\%$

$100 - 31,74 = 68,26\,\%$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,76 | 0,9608 | 1,96 | 0,9750 | 2,32 | 0,9898 | 2,72 | 0,9967 |
| 1,77 | 0,9616 | 1,97 | 0,9756 | 2,34 | 0,9904 | 2,74 | 0,9969 |
| 1,78 | 0,9625 | 1,98 | 0,9761 | 2,36 | 0,9909 | 2,76 | 0,9971 |
| 1,79 | 0,9633 | 1,99 | 0,9767 | 2,38 | 0,9913 | 2,78 | 0,9973 |
| 1,80 | 0,9641 | 2,00 | 0,9772 | 2,40 | 0,9918 | 2,80 | 0,9974 |
| 1,81 | 0,9649 | 2,02 | 0,9783 | 2,42 | 0,9922 | 2,82 | 0,9976 |
| 1,82 | 0,9656 | 2,04 | 0,9793 | 2,44 | 0,9927 | 2,84 | 0,9977 |
| 1,83 | 0,9664 | 2,06 | 0,9803 | 2,46 | 0,9931 | 2,86 | 0,9979 |
| 1,84 | 0,9671 | 2,08 | 0,9812 | 2,48 | 0,9934 | 2,88 | 0,9980 |
| 1,85 | 0,9678 | 2,10 | 0,9821 | 2,50 | 0,9938 | 2,90 | 0,9981 |
| 1,86 | 0,9686 | 2,12 | 0,9830 | 2,52 | 0,9941 | 2,92 | 0,9982 |
| 1,87 | 0,9693 | 2,14 | 0,9838 | 2,54 | 0,9945 | 2,94 | 0,9984 |
| 1,88 | 0,9699 | 2,16 | 0,9846 | 2,56 | 0,9948 | 2,96 | 0,9985 |
| 1,89 | 0,9706 | 2,18 | 0,9854 | 2,58 | 0,9951 | 2,98 | 0,9986 |
| 1,90 | 0,9713 | 2,20 | 0,9861 | 2,60 | 0,9953 | 3,00 | 0,9986 |
| 1,91 | 0,9719 | 2,22 | 0,9868 | 2,62 | 0,9956 | 3,20 | 0,9993 |
| 1,92 | 0,9726 | 2,24 | 0,9875 | 2,64 | 0,9959 | 3,40 | 0,9996 |
| 1,93 | 0,9732 | 2,26 | 0,9881 | 2,66 | 0,9961 | 3,60 | 0,9998 |
| 1,94 | 0,9738 | 2,28 | 0,9887 | 2,68 | 0,9963 | 3,80 | 0,9999 |
| 1,95 | 0,9744 | 2,30 | 0,9893 | 2,70 | 0,9965 | | |

1,96×σ esete; Valószínűségi szint = 95 % (valósz. 2 kétoldali)




**2σ esete** =

$100,00 - 97,72$

$\Delta = 2,28\,\%$

$2\times 2,28 \cong 4,55$

$\frac{4,55}{100} = 0,0455$

$1,0 - 0,0455 = 0,9545$

A normál eloszlás szimmetrikus, ezért mindez az alsó 5%-os alulmaradásra is igaz!

**Ha az építőanyagok tulajdonságait valószínűségi változóként fogjuk fel, akkor megfelelőségüket általában az 5 %-os alsó küszöbértékük alapján ítéljük meg.**

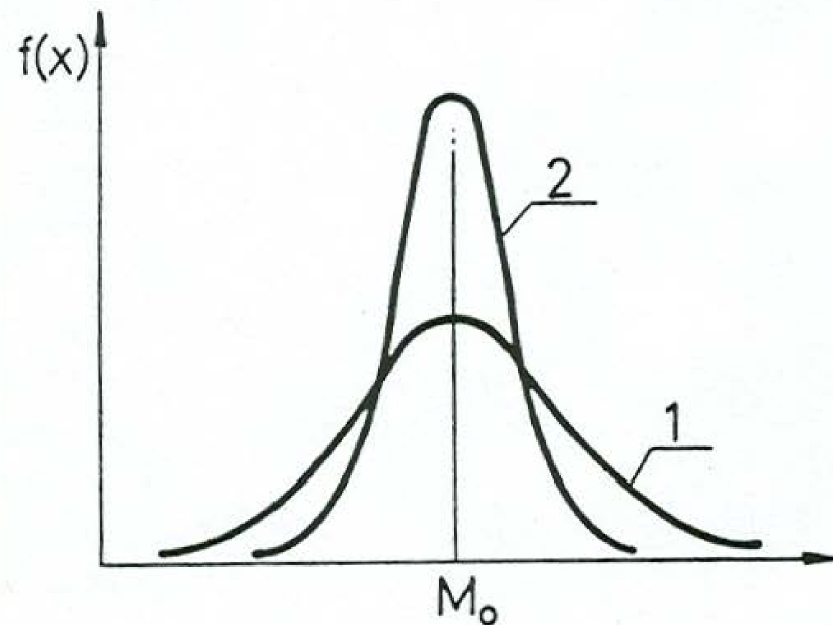
**Kérdés, hogy az építőmérnök a valószínűségi eloszlás felső küszöbértékét használja-e a méretezés során?**

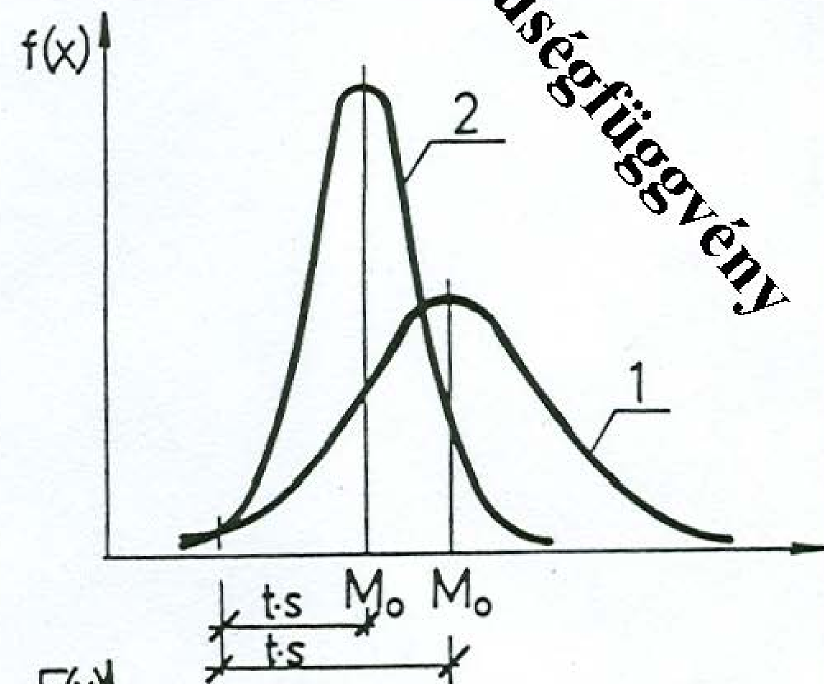
**A válasz:** ***Igen*****. A hatásokat (például szélteher, hóteher, födémek terhe, vízépítésben a legmagasabb vízszint stb.) általában felső küszöbértékükkel szokás figyelembe venni.**

**Említettük, hogy a *Gauss* függvény megadásához elég a várhatóérték (*m*) és a szórás (*σ*) ismerete.**

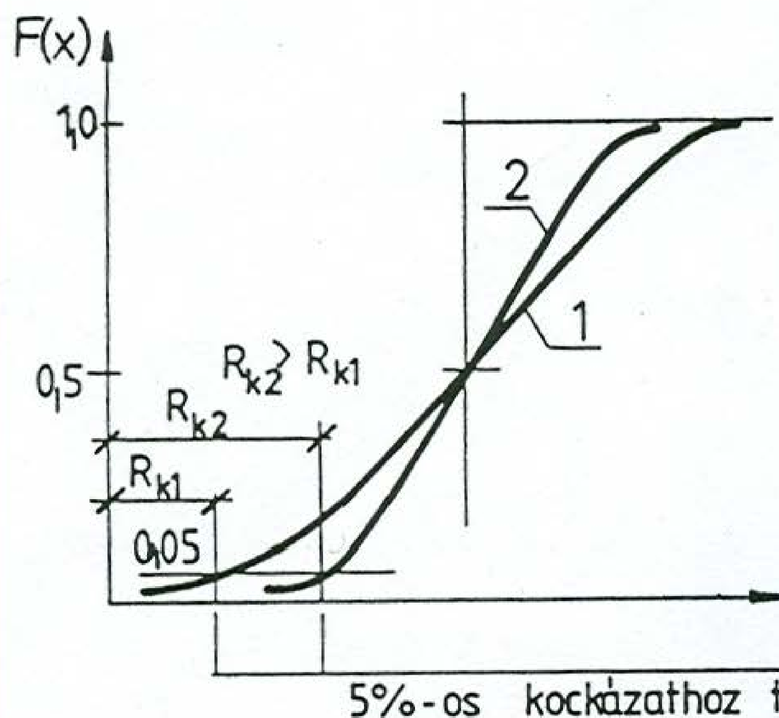
**Az elméleti várhatóérték (*m*) a *Gauss* görbe helyét, az elméleti szórás (*σ*) a *Gauss* görbe terjedelmét (terpesztését) határozza meg.**

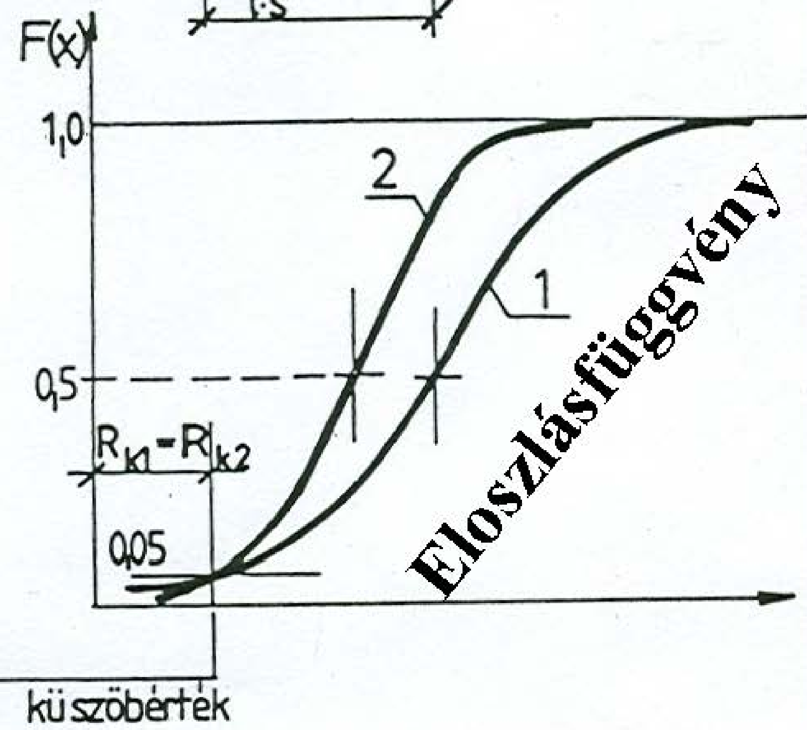
**Sűrűségfüggvény**




**Eloszlásfüggvény**



## Néhány fogalom (1)

- **Alulmaradási hányad:** Az előzőekben említett görbe alatti terület (0,05, illetve 5 %) neve.

  Meghatározás: A teljes tételben a megfelelőségi feltételt ki nem elégítő rész részaránya.

- **Alulmaradási tényező:** Az előzőekben szerepelt 1,645 vagy más értékű szorzó.

  Meghatározás: Szorzó, amellyel a szórást megszorozva, és a szorzatot a várhatóértékből (az átlagból) kivonva, a küszöbértékre jutunk. Jele általában: $\lambda_n$. Ilyen a későbbiekben tárgyalásra kerülő $t_n$ *Student* tényező is.

- **Alulmaradási tágasság:** Az alulmaradási tényező és a szórás szorzata.

  Meghatározás: Az alulmaradási tágasságot a várhatóértékből (az átlagból) kivonva a küszöbértéket (*jellemző értéket, karakterisztikus értéket*) kapjuk. Más szóval a várhatóérték (az átlag) és a küszöbérték különbsége. Jele a tapasztalati szórás esetén általában: $\lambda_n \cdot s$

# Néhány fogalom (2)

•**Valószínűségi változó:** A *független változó* elnevezése a matematikai statisztikában. Jele: $\xi$ (kszi) vagy $x$

• **Várhatóérték:** A tapasztalati átlagnak (számtani középértéknek) megfelelő elméleti fogalom a matematikai statisztikában, tehát a valószínűségi változó várhatóértéke, amely a *p'* gyakoriságfüggvény alatti területnek az ordinátatengelyre vett elsőrendű nyomatéka:

$$M(\xi) = \int \xi \cdot p' d\xi$$

•Jele: $M(\xi)$ vagy $m$

•**Átlag (számtani átlag):** A várhatóérték elnevezése, ha nem elméleti, hanem tapasztalati érték. A mindennapok gyakorlatából ismert fogalom. Jele például: $\bar{x}$

• **Szórás:** A valószínűségi változó felvett értéke ($\xi$) és várhatóértéke ($M(\xi)$ vagy $m$) közötti eltérés négyzetének várhatóértékéből vont négyzetgyök:

$$D(\xi) = \sqrt{M\left(\left(M(\xi) - \xi\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(m - \xi_i)^2}{n}}$$

Jele: $D(\xi)$ vagy $\sigma$

A szórás lehet *elméleti szórás*, vagy *tapasztalati szórás*. A fenti képlet és jel az elméleti szórás képlete, illetve jele. A tapasztalati szórást $s$-sel szokták jelölni.

# Szórás meghatározása

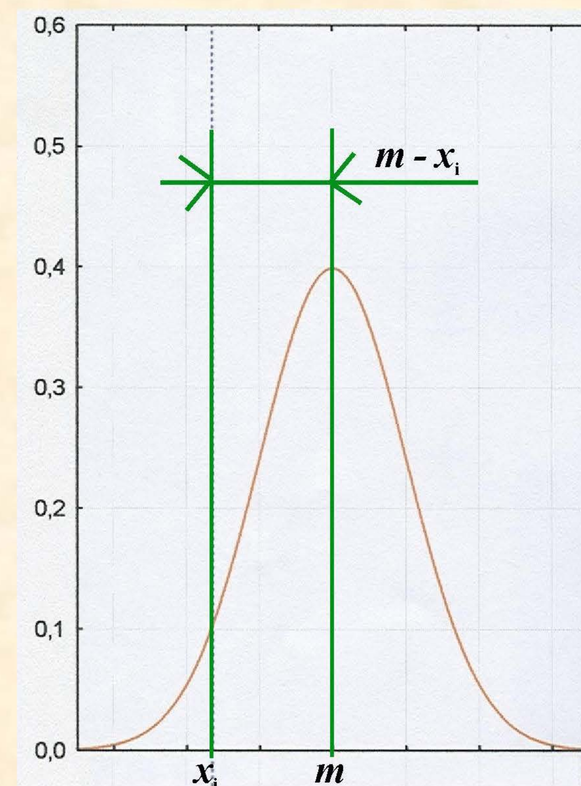
**Az elméleti szórást úgy határozzuk meg, hogy**

1. **minden mérési eredményre ($x_i$) képezzük a várhatóérték ($m$) az egyes mérési eredmények ($x_i$) különbségét: ($m - x_i$), és ezt eltérésnek* nevezzük,**
2. **ezeket a különbségeket négyzetre emeljük: $(m - x_i)^2$, ezek neve eltérésnégyzet*,**
3. **a négyzet értékeket összegezzük: $\Sigma(m - x_i)^2$, ezt eltérésnégyzet-összegnek* hívjuk,**
4. **és az elméleti szórás esetén az eltérésnégyzetösszeget* elosztjuk az $n$ mintaelemszámmal: $(\Sigma(m - x_i)^2)/n$,**
5. **majd a hányadosból négyzetgyököt vonunk:**

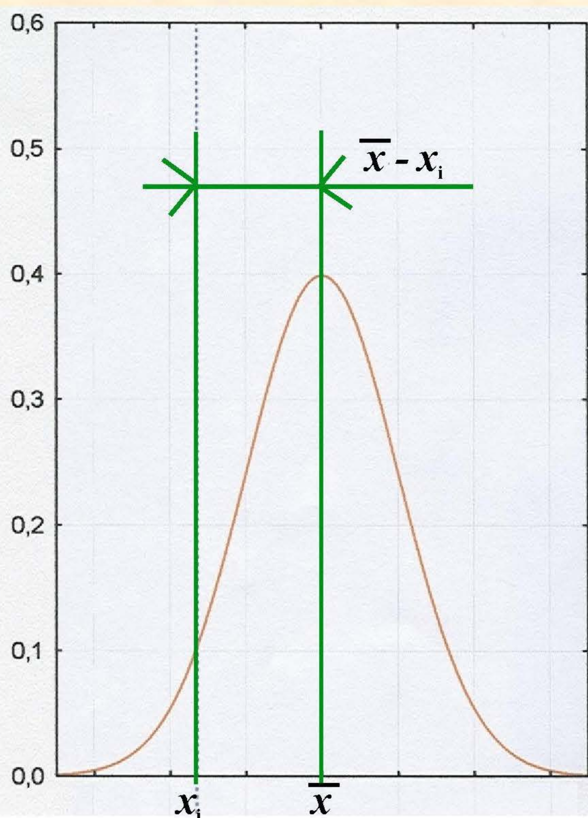
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(m - x_i)^2}{n}}$$

**Az elméleti szórás számításának feltétele, hogy $n \to \infty$.**

- **Megjegyzés: Amit itt „eltérés”-nek hívunk, azt a regresszió számításnál „hiba”-nak nevezzük!**



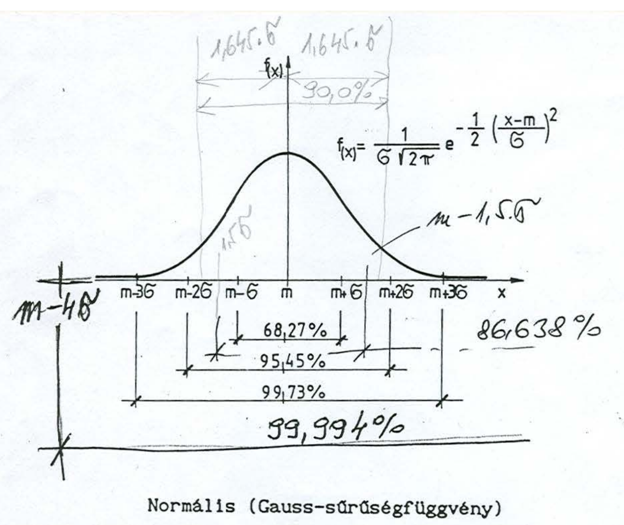
A gyakorlatban az $n \to \infty$ feltétel nem teljesül, az $n$ a gyakorlatban általában egy nagyon kis szám, és ezt a **tapasztalati szórás** számítása során figyelembe kell venni. Ez úgy történik, hogy az eltérésnégyzet-összeget nem $n$-nel, hanem ($n$-1)-gyel kell elosztani, tehát a **tapasztalati (empirikus, korrigált) szórás** ($s$) értéke:




$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

***Mennél kisebb az n értéke***, annál jobban eltér az ($n$-1)/$n$ hányados az 1-től, azaz adott eltérésnégyzetösszeg esetén minél kisebb az $n$ mintaelemszám, – a √[(n-1)/n] aránynak megfelelően – annál ***nagyobb a tapasztalati szórás*** ($s$), és ennek folytán ***kisebb küszöbérték*** adódik.

Ez már csak azért is így van, mert ha az $n$ értéke csökken, akkor nem csak a szórás ($s$), hanem az alulmaradási tényező ($\lambda_n$) is megnő, és ezáltal az alulmaradási tágasság ($\lambda_n \cdot s$) növekedésének már oka is van.



Normális (Gauss-sűrűségfüggvény)

**A *Gauss*-féle sűrűségfüggvény ábrán (emlékeztetésül itt balra látszik lekicsinyítve) bemutatott elméleti törvényszerűségek akkor igazak, ha $n \to \infty$, illetve gyakorlatilag több mint 40, azaz $n > 40$ ($n$ = mintaelem szám).**

**Ha $n \to \infty$ (azaz $n$ tart a végtelenhez), akkor**

- **a gyakorisági hisztogram és a gyakorisági polinom → a gyakorisági görbéhez (azaz a gyakorisági hisztogram és a gyakorisági polinom tart a gyakorisági görbéhez);**
- **a tapasztalati átlag ( $\overline{x}$ ) → tart az elméleti átlaghoz, amit várható-értéknek hívunk ($m$);**
- **a tapasztalati szórás ($s$) → tart az elméleti szóráshoz ($\sigma$).**

**A laboratóriumi mérési (vizsgálati) eredményekből a tapasztalati átlagot és a tapasztalati szórást tudjuk kiszámítani, ezekből az elméleti átlagra (várhatóértékre) és az elméleti szórásra csak következtetni tudunk, és a mérési eredményekből a küszöbértéket (jellemző értéket, karakterisztikus értéket) a vonatkozó termékszabvány előírása alapján határozzuk meg.**

**Tételezzük fel például, hogy egy hatalmas doboz (mondjuk akkora, mint a Műegyetem aulája) tele van egyforma, de különböző, fekete, fehér színű golyóval (például pingpong labdával), amelyek a hatalmas dobozban véletlenszerűen helyezkednek el, és amelyek arányát nem ismerjük.**



**Vegyünk mintát képzeletben a hatalmas dobozból például egy kis szakajtóval (kenyértészta kelesztésére való fületlen kosárkával), számoljuk meg a mintában lévő fekete és fehér golyókat, és tegyük fel a kérdést: Mi a valószínűsége annak, hogy a mintában lévő fekete és fehér golyók aránya ugyanaz, mint a hatalmas doboz halmazában?**

**Könnyű elképzelni, hogy vizsgálódásunk megbízhatósága annál nagyobb lesz, minél nagyobb a szakajtónk, azaz minél nagyobb a mintában lévő golyók *n* mintaelem száma. Teljes bizonysággal azonban csak akkor tudnánk a kérdésre válaszolni, ha a hatalmas dobozban lévő valamennyi golyót megvizsgálnánk. A gyakorlatban erre persze nincs lehetőségünk, de az *n* mintaelemszám növelésére törekednünk kell.**[22]

**A vizsgálati minta *n* elemszáma a vizsgálatnak nagyon fontos jellemzője, mert jelentősen befolyásolja a vizsgálati eredmények értékelésével végzett termék-minősítés megbízhatóságát.**

**Az *n* mintaelemszámot a vizsgálati (mérési) eredmények értékelése során a *Student*-féle eloszlás (nevezik *t*-eloszlásnak is) alkalmazásával lehet figyelembe venni.**

**A *Student* eloszlás jellegzetessége, hogy az *n* mintaelemszámnak is függvénye, és**

**ha $n \to \infty$, akkor**

**a *Student* görbe egyre jobban megközelíti a *Gauss* görbét, azaz**

***Student* görbe → *Gauss* görbe**

**A *Student*-eloszlást *William Sealy Gosset* (Canterbury, Kent, 1876. június 13. – Beaconsfield, Buckinghamshire, 1937. október 16.) angol statisztikus írta fel, és 1908-ban *Student* álnéven publikálta.**




***W. S. Gosset*** **a híres, 1382-ben alapitott Winchester College magángimnázium oxfordi kollégiumában kémiát és matematikát tanult, majd 1899-ben az ír *Arthur Guinness* (1725. szeptember 24. – 1803. január 23.) és fia világhírű dublini sörfőzdéjében helyezkedett el. Itt dolgozta ki matematikai statisztikai módszerét az árpa minőség vizsgálati eredmények megbizhatóságának megitélésére. Minthogy korábban egy másik munkatárs publikációjával kárt okozott a sörfőzdének, megtiltották az alkalmazottaknak, hogy tanulmányokat tegyenek közzé. Ez az oka annak, hogy *W. S. Gosset* álnéven írt.**

**A történethez tartozik, hogy *Gosset* nagyon jó munkakapcsolatba került az élettani laboratórium vezetőjével, *Karl Pearson* angol matematikussal (1857. március 27. – 1936. április 27.), a $\chi^2$-eloszlás és a korrelációs együttható kidolgozójával, akitől sokat tanult. A *Student*-féle eloszlás jelentőségét mégsem *K. Pearson*, hanem *Ronald Aylmer Fisher* (1890. február 17. – 1962. július 29.) angol genetikus és statisztikus, az *F*-eloszlás vagy *Fisher*-eloszlás kidolgozója ismerte fel.**

***W. S. Gosset* 1908-ban a *Student*-féle eloszlást a „*t*" betűvel jelölte, ezért azt *t-eloszlásnak* is nevezzük.**

**A *Student*-féle vagy *t*-eloszlás sűrűségfüggvényének alakja:**

$$f_{(n-1)}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi\cdot(n-1)}}\cdot\left(1+\frac{t^2}{(n-1)}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

**ahol $\Gamma$ a gamma-eloszlást jelöli:**

$$\Gamma_{(n)}(t) = \int_0^\infty t^{n-1}\cdot e^{-t}\cdot dt$$

**ahol $t = -\log x$ *és***

$$\Gamma_{(n+1)} = n\cdot\Gamma_{(n)}$$

$$\Gamma_{(1)} = 1$$

$$\Gamma_{(n)} = (n-1)!$$

**Az egyoldali 5 %-os alulmaradási hányadhoz tartozó *Student* tényező ($t_n$), 50 %-os elfogadási valószínűség mellett**
**(*Stange, K. – Henning, H.-J.*, 1966)**

| Mintaelem szám $n$ | Szabadság-fok $n$ - 1 | *Student*-tényező $t_n$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 6,314 |
| 3 | 2 | 2,920 |
| 4 | 3 | 2,353 |
| 5 | 4 | 2,132 |
| 6 | 5 | 2,015 |
| 7 | 6 | 1,943 |
| 8 | 7 | 1,895 |
| 9 | 8 | 1,860 |
| 10 | 9 | 1,833 |
| 11 | 10 | 1,812 |

| Mintaelem szám $n$ | Szabadság-fok $n$ - 1 | *Student*-tényező $t_n$ |
|---|---|---|
| 12 | 11 | 1,796 |
| 13 | 12 | 1,782 |
| 14 | 13 | 1,771 |
| 15 | 14 | 1,761 |
| 20 | 19 | 1,729 |
| 30 | 29 | 1,699 |
| 35 | 34 | 1,691 |
| 100 | 99 | 1,660 |
| 500 | 499 | 1,648 |
| | $\infty$ | 1,645 |

**Esetünkben a *Student*-tényező az $N(0,1)$ eloszlású $t$-eloszlás — egyoldali 5 %-os alulmaradási hányadához tartozó — $t_n$ valószínűségi változója ($p$ = 0,05 értékhez tartozó kvantilise, küszöbértéke).**

## Fogalommeghatározás (3)

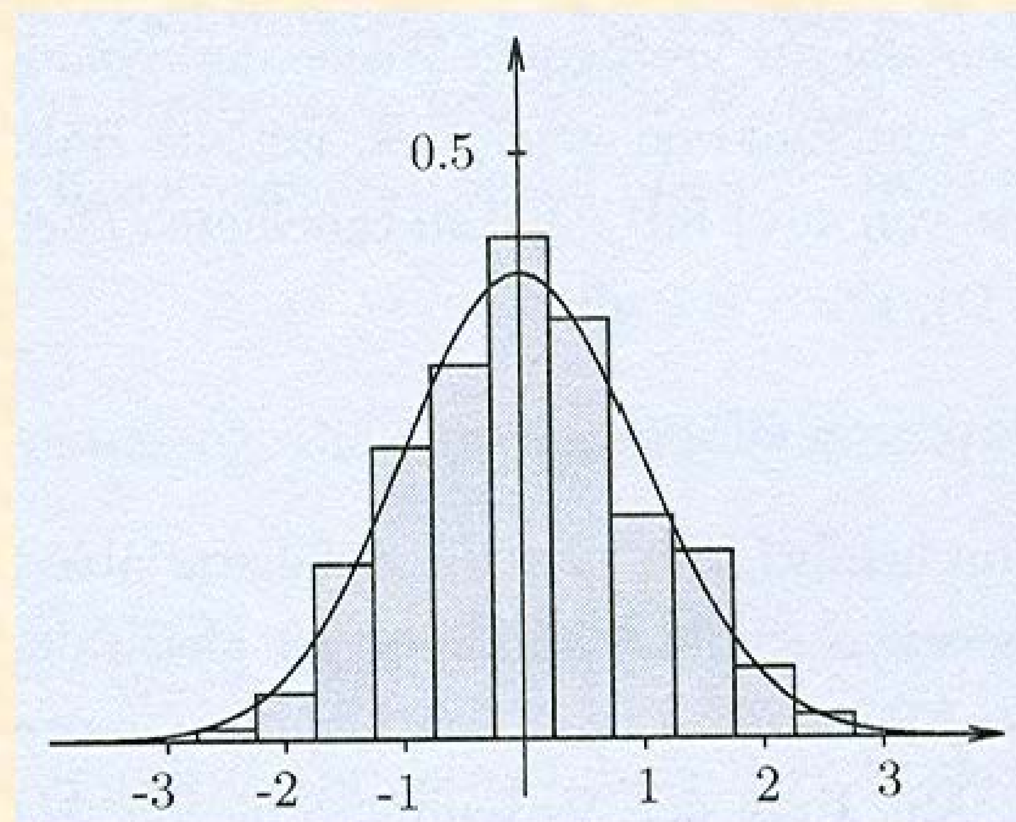
**Standardizált valószínűségi változó:**

**A $\xi$ valószínűségi változó standardizáltja:**

$$\xi_{sta} = \frac{M(\xi) - \xi}{D(\xi)}$$

**azaz képezni kell az $M(\xi)$ várhatóérték és a $\xi$ valószínűségi változó különbségét, amelyet eltérésnek neveztünk (ezáltal a függvényt az origóba toljuk), és el kell osztani a $D(\xi)$ szórással. Ez tulajdonképpen függvény-transzformáció.**

**A standardizált valószínűségi függvény**
**várhatóértéke: 0, szórása: 1.**



Graf / Henning / Stange

# Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik

Zweite völlig neu bearbeitete Auflage

von

Kurt Stange
Dr. phil.
o. Professor der Technischen Hochschule Aachen
Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik

und

Hans-Joachim Henning
Dr. phil.
Deutsches Wollforschungsinstitut an der Technischen Hochschule Aachen

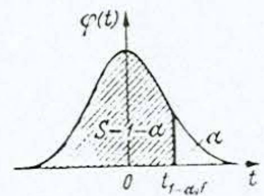
Mit 78 Abbildungen



Springer-Verlag
Berlin / Heidelberg / New York
1966

Tabelle C 4.[1] *Schwellenwerte $t_{1-\alpha;f}$ der t-Verteilung zur statistischen Sicherheit $S = 1 - \alpha$ (bei einseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f*

$$t_{1-\alpha} = -t_\alpha$$




MSZ 4720-2

| Freiheitsgrad f | Statistische Sicherheit $S = 1 - \alpha$ | | | | | | | Freiheitsgrad f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 90 % | 95 % | 97,5 % | 99 % | 99,5 % | 99,9 % | 99,95 % | |
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 318,3 | 636,6 | 1 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,33 | 31,60 | 2 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,21 | 12,92 | 3 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 | 8,610 | 4 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 5,893 | 6,869 | 5 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 | 5,959 | 6 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 | 5,408 | 7 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 | 5,041 | 8 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 | 4,781 | 9 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 | 4,587 | 10 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,025 | 4,437 | 11 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 | 4,318 | 12 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 | 4,221 | 13 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,787 | 4,140 | 14 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 | 4,073 | 15 |
| 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,686 | 4,015 | 16 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 | 3,965 | 17 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,610 | 3,922 | 18 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 | 3,883 | 19 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,552 | 3,850 | 20 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 | 3,819 | 21 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 | 3,792 | 22 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 | 3,768 | 23 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 | 3,745 | 24 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 | 3,725 | 25 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 | 3,707 | 26 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 | 3,690 | 27 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 | 3,674 | 28 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,396 | 3,659 | 29 |
| 30 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 | 3,646 | 30 |
| 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 | 3,551 | 40 |
| 50 | 1,299 | 1,676 | 2,009 | 2,403 | 2,678 | 3,261 | 3,496 | 50 |
| 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,232 | 3,460 | 60 |
| 80 | 1,292 | 1,664 | 1,990 | 2,374 | 2,639 | 3,195 | 3,416 | 80 |
| 100 | 1,290 | 1,660 | 1,984 | 2,364 | 2,626 | 3,174 | 3,390 | 100 |
| 200 | 1,286 | 1,652 | 1,972 | 2,345 | 2,601 | 3,131 | 3,340 | 200 |
| 500 | 1,283 | 1,648 | 1,965 | 2,334 | 2,586 | 3,107 | 3,310 | 500 |
| ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 | 3,291 | ∞ |

[1] Tab. C 4 und C 5 nach E. T. Federighi: Extended tables of the percentage points of Student's *t*-distribution. J. Am. Stat. Ass. 54, 1959, S. 683.

**Standardizált eloszlásfüggvény 100 %-ból kivont ordinátája. Például 95 %, ha a standardizált eloszlásfüggvény ordinátája $p^{\%}$ = 5 %, vagy 97,5 %, ha $p^{\%}$ = 2,5 % stb.**

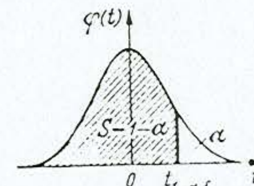
**Ez a sor az $f$ = 4 szabadság fokú ($n$ = 5) standardizált *Student*-féle eloszlásfüggvény abszcisszáit ($t$) adja. Például $t_{n=5}$ = 2,132 esetén $p^{\%}$ = 5 %, vagy $t_{n=2,5}$ = 2,776 esetén $p^{\%}$ = 2,5 % stb.**

**Ez a sor ($f = \infty$) a standardizált *Gauss*-féle eloszlásfüggvény abszcisszáit adja. Például $t_{\infty}$ = 1,645 esetén $p$% = 5 %, vagy $t_{\infty}$ = 1,960 esetén $p$% = 2,5 % stb.**

Tabelle C 4.[1] *Schwellenwerte $t_{1-\alpha;f}$ der t-Verteilung zur statistischen Sicherheit $S = 1 - \alpha$ (bei einseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f*

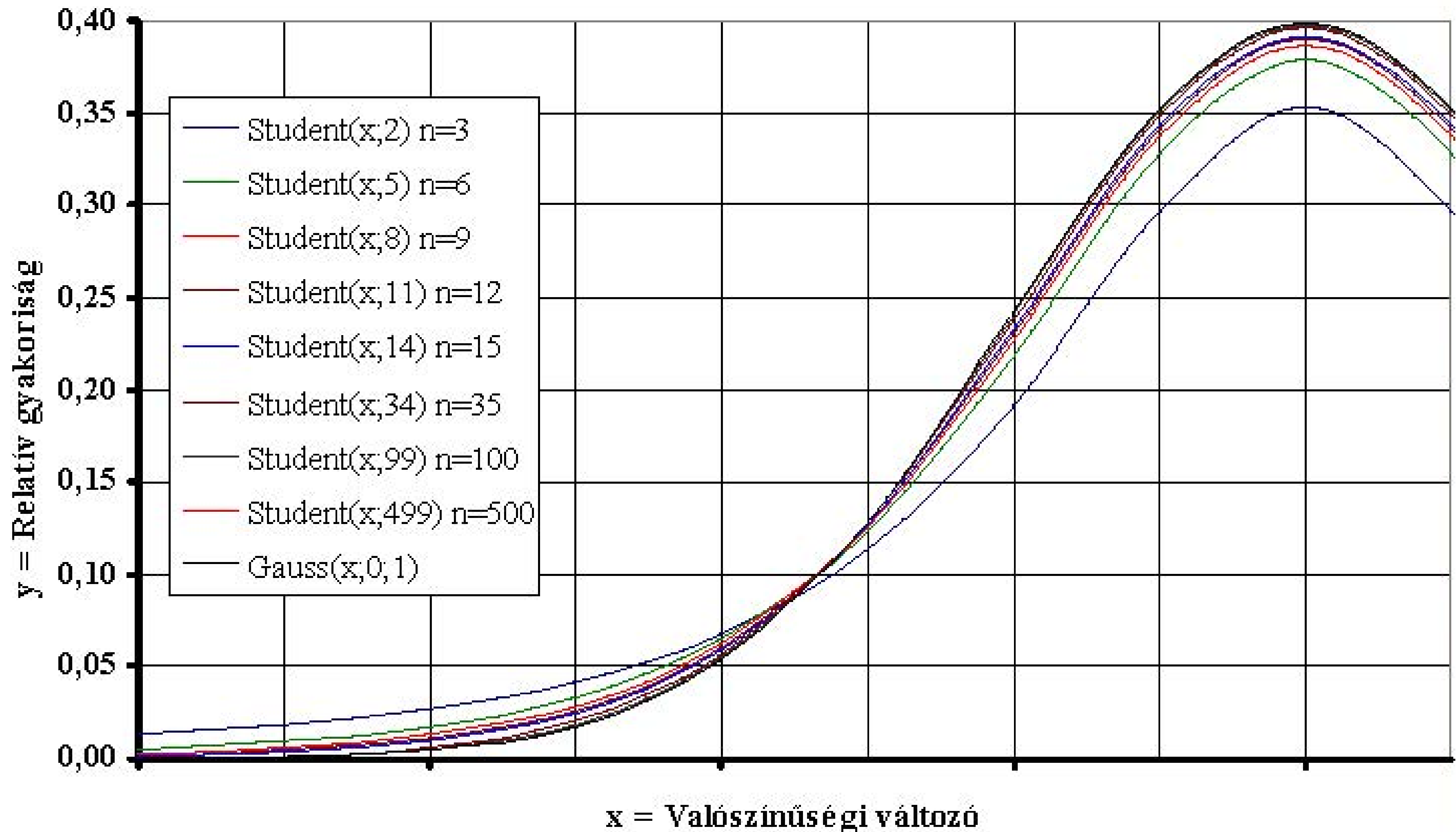
$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$

MSZ 4720-2

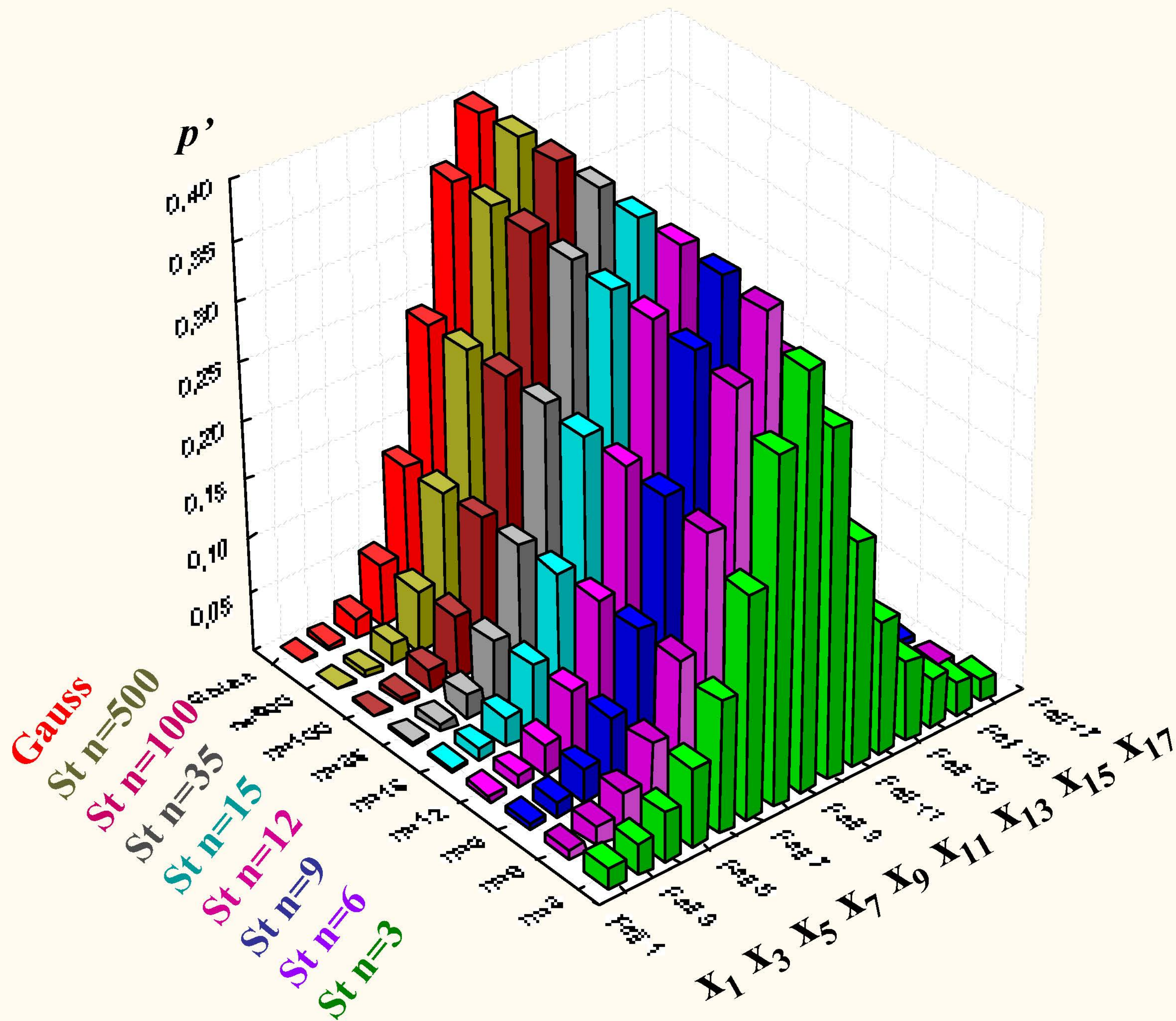



| n | Freiheitsgrad f | Statistische Sicherheit S = 1 − α: 90 % | 95 % | 97,5 % | 99 % | 99,5 % | 99,9 % | 99,95 % | Freiheitsgrad f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3,078 | 6,314 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 318,3 | 636,6 | 1 |
| 3 | 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,33 | 31,60 | 2 |
| 4 | 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,21 | 12,92 | 3 |
| 5 | 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 | 8,610 | 4 |
| 6 | 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 5,893 | 6,869 | 5 |
| 7 | 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 | 5,959 | 6 |
| 8 | 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 | 5,408 | 7 |
| 9 | 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 | 5,041 | 8 |
| 10 | 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 | 4,781 | 9 |
| 11 | 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 | 4,587 | 10 |
| | 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,025 | 4,437 | 11 |
| | 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 | 4,318 | 12 |
| | 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 | 4,221 | 13 |
| 15 | 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,787 | 4,140 | 14 |
| 16 | 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 | 4,073 | 15 |
| | 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,686 | 4,015 | 16 |
| | 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 | 3,965 | 17 |
| | 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,610 | 3,922 | 18 |
| 20 | 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 | 3,883 | 19 |
| 21 | 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,552 | 3,850 | 20 |
| | 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 | 3,819 | 21 |
| | 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 | 3,792 | 22 |
| | 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 | 3,768 | 23 |
| 25 | 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 | 3,745 | 24 |
| 26 | 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 | 3,725 | 25 |
| | 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 | 3,707 | 26 |
| | 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 | 3,690 | 27 |
| | 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 | 3,674 | 28 |
| 30 | 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,396 | 3,659 | 29 |
| 31 | 30 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 | 3,646 | 30 |
| | 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 | 3,551 | 40 |
| | 50 | 1,299 | 1,676 | 2,009 | 2,403 | 2,678 | 3,261 | 3,496 | 50 |
| | 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,232 | 3,460 | 60 |
| 81 | 80 | 1,292 | 1,664 | 1,990 | 2,374 | 2,639 | 3,195 | 3,416 | 80 |
| | 100 | 1,290 | 1,660 | 1,984 | 2,364 | 2,626 | 3,174 | 3,390 | 100 |
| | 200 | 1,286 | 1,652 | 1,972 | 2,345 | 2,601 | 3,131 | 3,340 | 200 |
| | 500 | 1,283 | 1,648 | 1,965 | 2,334 | 2,586 | 3,107 | 3,310 | 500 |
| | ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 | 3,291 | ∞ |
| | $p^{\%}$ = | 10 | 5 | 2,5 | 1 | 0,5 | 0,1 | 0,05 % | |

# Ha $n \to \infty$, akkor *Student* görbe → *Gauss* görbe (sűrűségfüggvények bal oldala)



Gauss- és Student-eloszlások standardizált sűrűségfüggvénye



## *Gauss*- és *Student*-eloszlások standardizált sűrűségfüggvényének (az előző oldalon lévő térbeli hisztogram) adatai (*p'* ordináták)

STATISTICA - [Sequentielle-sűrűség.stg*]

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Layouts Extras Fenster ?

Zur Arbeitsmappe Zum Bericht

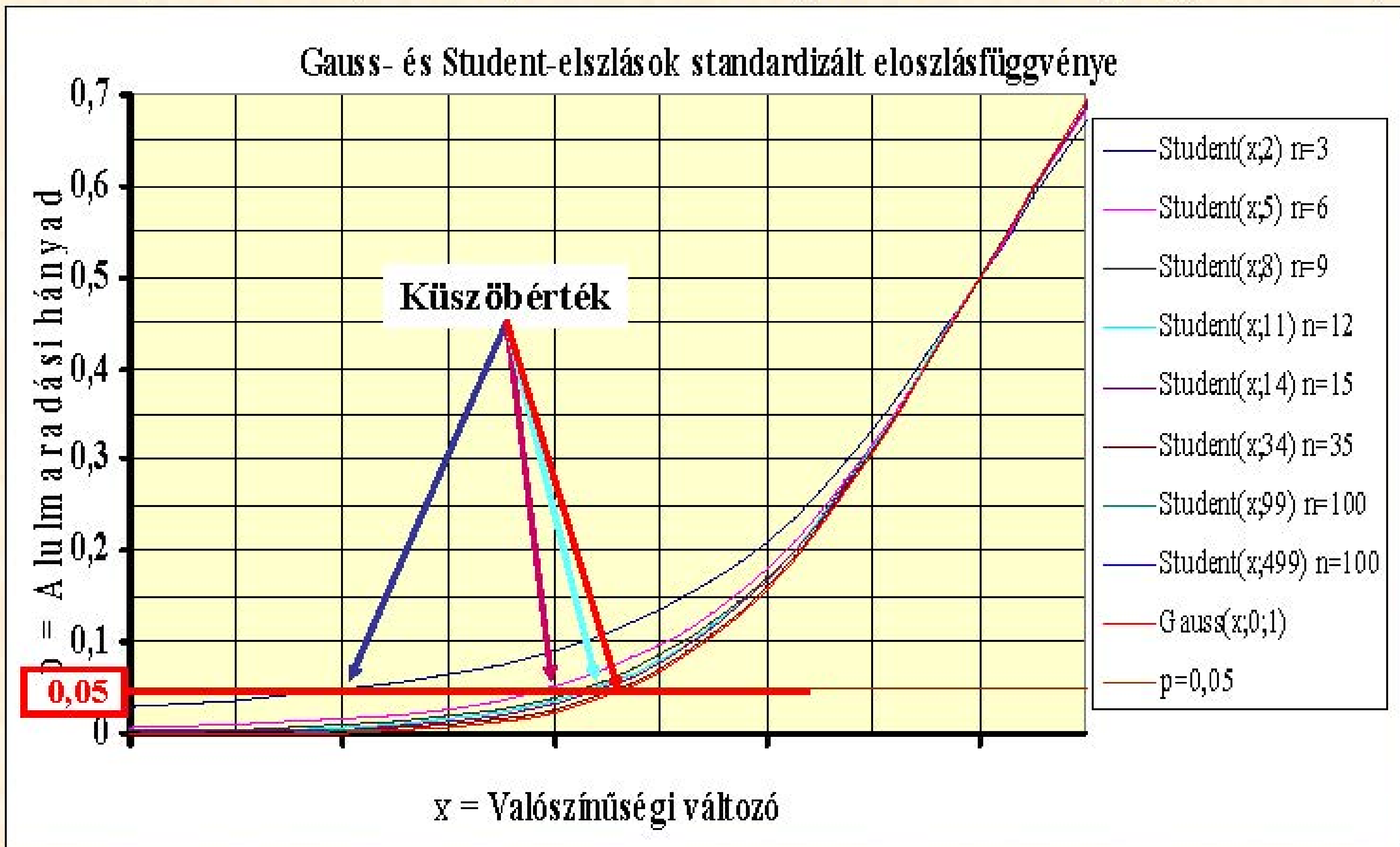
Berechnete Grafik-Daten... Plot hinzufügen...

| | 3D-Sequentiell n=3 | 3D-Sequentiell n=6 | 3D-Sequentiell n=9 | 3D-Sequentiell n=12 | 3D-Sequentiell n=15 | 3D-Sequentiell n=35 | 3D-Sequentiell n=100 | 3D-Sequentiell n=500 | 3D-Sequentiell Gauss |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 = -4,0 | 0,01309457 | 0,005123727 | 0,002756306 | 0,00178331 | 0,001290364 | 0,000464112 | 0,000222168 | 0,00013383 | 0,00013383 |
| x2 = -3,5 | 0,018589928 | 0,009244354 | 0,005920595 | 0,004373927 | 0,003512787 | 0,001816113 | 0,001165661 | 0,000872683 | 0,000872683 |
| x3 = -3,0 | 0,027410122 | 0,017292579 | 0,013009418 | 0,010795166 | 0,009465921 | 0,006499804 | 0,005133166 | 0,004431848 | 0,004431848 |
| x4 = -2,5 | 0,042200644 | 0,033326239 | 0,028781348 | 0,026222537 | 0,024599933 | 0,020663089 | 0,018640943 | 0,0175283 | 0,0175283 |
| x5 = -2,0 | 0,068041382 | 0,06509031 | 0,062368085 | 0,060654323 | 0,059508341 | 0,056543839 | 0,054917641 | 0,053990967 | 0,053990967 |
| x6 = -1,5 | 0,114134412 | 0,124517345 | 0,126771205 | 0,127677403 | 0,12815082 | 0,129035153 | 0,129366407 | 0,129517596 | 0,129517596 |
| x7 = -1,0 | 0,19245009 | 0,219679797 | 0,22760758 | 0,231377879 | 0,233580824 | 0,238455562 | 0,240753778 | 0,241970725 | 0,241970725 |
| x8 = -0,5 | 0,296296296 | 0,327918531 | 0,336693898 | 0,340795755 | 0,343170658 | 0,34836792 | 0,350790109 | 0,352065327 | 0,352065327 |
| x9 = 0,0 | 0,353553391 | 0,37960669 | 0,386699021 | 0,389989757 | 0,391887456 | 0,396020059 | 0,397936138 | 0,39894228 | 0,39894228 |
| x10 = +0,5 | 0,296296296 | 0,327918531 | 0,336693898 | 0,340795755 | 0,343170658 | 0,34836792 | 0,350790109 | 0,352065327 | 0,352065327 |
| x11 = +1,0 | 0,19245009 | 0,219679797 | 0,22760758 | 0,231377879 | 0,233580824 | 0,238455562 | 0,240753778 | 0,241970725 | 0,241970725 |
| x12 = +1,5 | 0,114134412 | 0,124517345 | 0,126771205 | 0,127677403 | 0,12815082 | 0,129035153 | 0,129366407 | 0,129517596 | 0,129517596 |
| x13 = +2,0 | 0,068041382 | 0,06509031 | 0,062368085 | 0,060654323 | 0,059508341 | 0,056543839 | 0,054917641 | 0,053990967 | 0,053990967 |
| x14 = +2,5 | 0,042200644 | 0,033326239 | 0,028781348 | 0,026222537 | 0,024599933 | 0,020663089 | 0,018640943 | 0,0175283 | 0,0175283 |
| x15 = +3,0 | 0,027410122 | 0,017292579 | 0,013009418 | 0,010795166 | 0,009465921 | 0,006499804 | 0,005133166 | 0,004431848 | 0,004431848 |
| x16 = +3,5 | 0,018589928 | 0,009244354 | 0,005920595 | 0,004373927 | 0,003512787 | 0,001816113 | 0,001165661 | 0,000872683 | 0,000872683 |
| x17 = +4,0 | 0,01309457 | 0,005123727 | 0,002756306 | 0,00178331 | 0,001290364 | 0,000464112 | 0,000222168 | 0,00013383 | 0,00013383 |

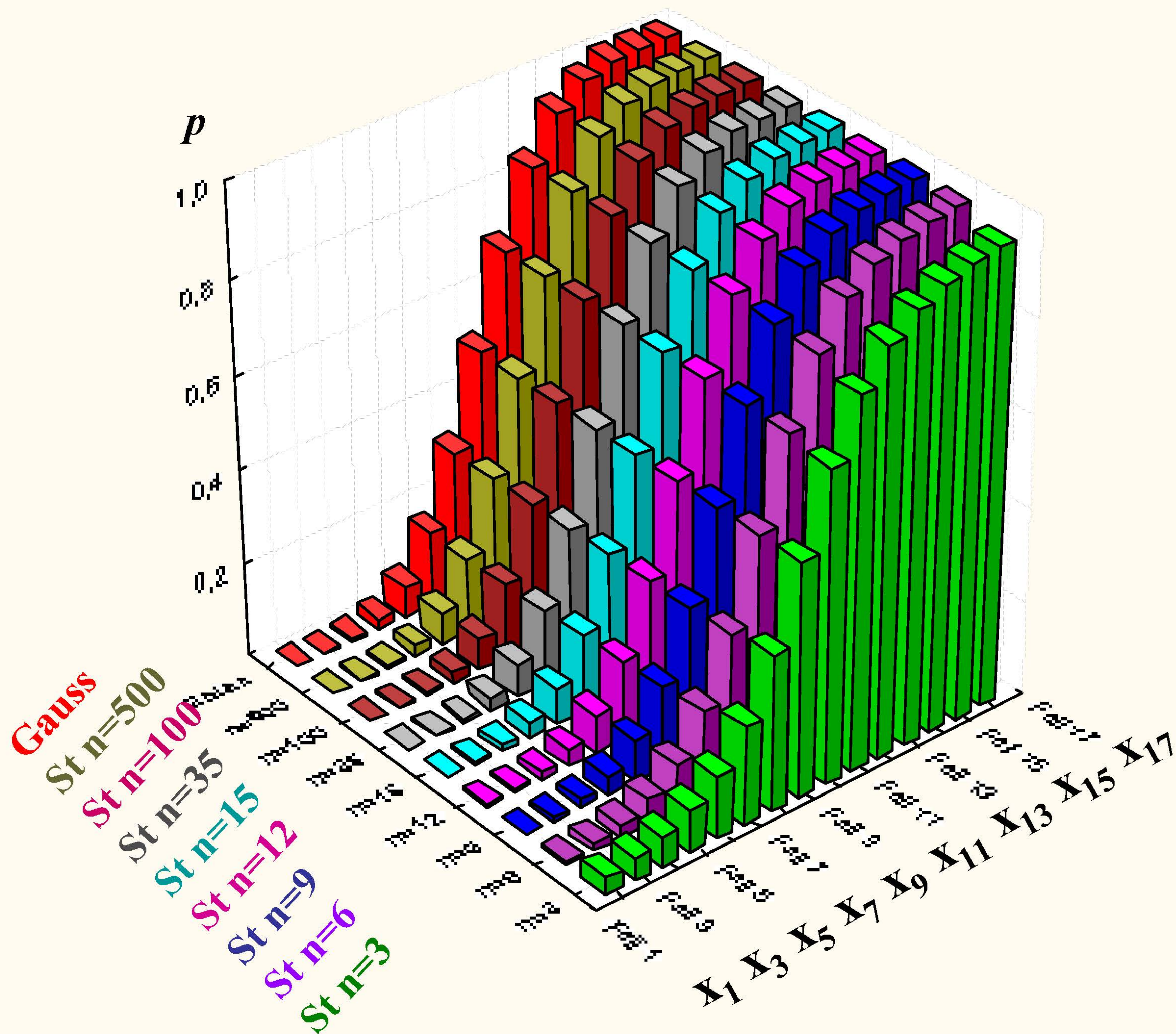
# Ha $n \to \infty$, akkor *Student* görbe → *Gauss* görbe

## (eloszlásfüggvények bal széle)

## és a 0,05 értékű (5 %-os) küszöbérték jobbra tolódik (nagyobb lesz)



Gauss- és Student-eloszlások standardizált eloszlásfüggvénye



# *Gauss*- és *Student*-eloszlások standardizált eloszlásfüggvényének (az előző oldalon lévő térbeli hisztogram) adatai ($p$ ordináták)

STATISTICA - [Sequentielle-eloszlás.stg*]

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Layouts Extras Fenster ?

Zur Arbeitsmappe Zum Bericht

Berechnete Grafik-Daten... Plot hinzufügen...

| | 3D-Sequentiell n=3 | 3D-Sequentiell n=6 | 3D-Sequentiell n=9 | 3D-Sequentiell n=12 | 3D-Sequentiell n=15 | 3D-Sequentiell n=35 | 3D-Sequentiell n=100 | 3D-Sequentiell n=500 | 3D-Sequentiell Gauss |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 = -4,0 | 0,028595479 | 0,005161708 | 0,001974886 | 0,001043097 | 0,000658025 | 0,000161911 | 0,000061126 | 0,000036468 | 0,000031671 |
| x2 = -3,5 | 0,036413675 | 0,008642216 | 0,004039541 | 0,002485145 | 0,001767604 | 0,000660458 | 0,000349532 | 0,000253471 | 0,000232629 |
| x3 = -3,0 | 0,047732983 | 0,015049624 | 0,008535841 | 0,00603992 | 0,004775756 | 0,00251267 | 0,001707754 | 0,001417382 | 0,001349898 |
| x4 = -2,5 | 0,06480586 | 0,02724505 | 0,018471018 | 0,014753187 | 0,012733332 | 0,008703222 | 0,007031297 | 0,006369608 | 0,006209665 |
| x5 = -2,0 | 0,09175171 | 0,050969739 | 0,040258118 | 0,035401977 | 0,032643975 | 0,026769914 | 0,024119839 | 0,023020875 | 0,022750132 |
| x6 = -1,5 | 0,136196561 | 0,096951839 | 0,086001646 | 0,080879009 | 0,077912659 | 0,071421982 | 0,068398408 | 0,067123406 | 0,066807201 |
| x7 = -1,0 | 0,211324865 | 0,181608734 | 0,173296754 | 0,169400348 | 0,167140972 | 0,162187355 | 0,159874237 | 0,158897588 | 0,158655254 |
| x8 = -0,5 | 0,333333333 | 0,319149436 | 0,315268038 | 0,31346311 | 0,312420958 | 0,310147949 | 0,309092322 | 0,308647745 | 0,308537539 |
| x9 = 0,0 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| x10 = +0,5 | 0,666666667 | 0,680850564 | 0,684731962 | 0,68653689 | 0,687579042 | 0,689852051 | 0,690907678 | 0,691352255 | 0,691462461 |
| x11 = +1,0 | 0,788675135 | 0,818391266 | 0,826703246 | 0,830599652 | 0,832859028 | 0,837812645 | 0,840125763 | 0,841102412 | 0,841344746 |
| x12 = +1,5 | 0,863803439 | 0,903048161 | 0,913998354 | 0,919120991 | 0,922087341 | 0,928578018 | 0,931601592 | 0,932876594 | 0,933192799 |
| x13 = +2,0 | 0,90824829 | 0,949030261 | 0,959741882 | 0,964598023 | 0,967356025 | 0,973230086 | 0,975880161 | 0,976979125 | 0,977249868 |
| x14 = +2,5 | 0,93519414 | 0,97275495 | 0,981528982 | 0,985246813 | 0,987266668 | 0,991296778 | 0,992968703 | 0,993630392 | 0,993790335 |
| x15 = +3,0 | 0,952267017 | 0,984950376 | 0,991464159 | 0,99396008 | 0,995224244 | 0,99748733 | 0,998292246 | 0,998582618 | 0,998650102 |
| x16 = +3,5 | 0,963586325 | 0,991357784 | 0,995960459 | 0,997514855 | 0,998232396 | 0,999339542 | 0,999650468 | 0,999746529 | 0,999767371 |
| x17 = +4,0 | 0,971404521 | 0,994838292 | 0,998025114 | 0,998956903 | 0,999341975 | 0,999838089 | 0,999938874 | 0,999963532 | 0,999968329 |

Óriás harcsa, a hossza 2 m

# EGY KIS JÁTÉK

**Ezt a horgászt 1998-ban nagy szerencse érte, mert óriási, 2 m hosszú harcsát fogott.**

**Az év őszén arra kértem 55 főiskolai hallgatót, hogy becsülje meg a hal súlyát.**

**Idézzük emlékezetünkbe, amit a mértékegységek tárgyalása során megbeszéltünk: az SI mértékegységrendszerben a *súly mértékegysége N*, a *kg pedig a tömeg mértékegysége*.**

# Az óriás harcsa becsült súlya, 1. oldal

| Minta | Rendezett minta | Sorszám |
|---|---|---|
| 500 | 180 | 1. |
| 750 | 200 | 2. |
| 1500 | 200 | 3. |
| 200 | 200 | 4. |
| 700 | 200 | 5. |
| 650 | 250 | 6. |
| 800 | 300 | 7. |
| 800 | 300 | 8. |
| 800 | 350 | 9. |
| 540 | 400 | 10. |
| 500 | 400 | 11. |
| 540 | 450 | 12. |
| 850 | 500 | 13. |
| 700 | 500 | 14. |
| 750 | 500 | 15. |
| 1200 | 500 | 16. |
| 400 | 500 | 17. |
| 780 | 500 | 18. |
| 870 | 540 | 19. |
| 600 | 540 | 20. |
| 200 | 540 | 21. |
| 1000 | 570 | 22. |
| 500 | 600 | 23. |
| 500 | 600 | 24. |
| 800 | 600 | 25. |
| 800 | 630 | 26. |
| 300 | 650 | 27. |
| 800 | 650 | 28. |

1998. szeptember 14-16-án 55 főiskolai hallgató
a bemutatott fényképről megbecsülte a 2 m hosszú harcsa súlyát

| 5 %-os alsó küszöb, 0,05*55=2,75 N | Hisztogram |
|---|---|

- Hétfő 14 óra, Menedzser 6. csoport
- Hétfő 16 óra, Menedzser 2. csoport
- Szerda 12 óra, Magasépítő 6. csoport
- Szerda 14 óra, Magasépítő 3. csoport
- Szerda 16 óra, Magasépítő 7. csoport

| 25 %-os alsó kvan-tilis, 0,25*55=13,75 N | Hisztogram |
|---|---|

A hallgatók közül huszonnégyen a súly helyett
a tömeget adták meg,
ugyanis [kg]-ban fejezték ki a kérdezett mennyiséget.
Ez a megkérdezett hallgatók 43,6 %-a.

**A feltett kérdésre a helyes válasz:**

A hal súlya körülbelül 450 N, mert a hal tömege 46 kg volt.

Súly = Tömeg * Nehézségi gyorsulás =
$= 46\ kg * 9{,}81\ m/sec^2 =$
$= 451{,}26\ kg*m/sec^2 = 451{,}26\ N$

Hisztogram

Medián = 650 A rendezett minta középső elemének értéke.

# Az óriás harcsa becsült súlya, 2. oldal

| Minta | Rendezett minta | Sorszám |
|---|---|---|
| 600 | 650 | 29. |
| 400 | 660 | 30. |
| 540 | 700 | 31. |
| 700 | 700 | 32. |
| 500 | 700 | 33. |
| 1100 | 700 | 34. |
| 300 | 700 | 35. |
| 950 | 720 | 36. |
| 350 | 750 | 37. |
| 720 | 750 | 38. |
| 700 | 780 | 39. |
| 180 | 800 | 40. |
| 250 | 800 | 41. |
| 810 | 800 | 42. |
| 650 | 800 | 43. |
| 1000 | 800 | 44. |
| 800 | 800 | 45. |
| 450 | 800 | 46. |
| 600 | 810 | 47. |
| 700 | 850 | 48. |
| 630 | 870 | 49. |
| 500 | 950 | 50. |
| 570 | 1000 | 51. |
| 650 | 1000 | 52. |
| 660 | 1100 | 53. |
| 200 | 1200 | 54. |
| 200 | 1500 | 55. |

**Matematikai statisztikai jellemzők**

| | | |
|---|---|---|
| A becsült értékek átlaga: | 637,090909 | N |
| A becsült értékek szórása: | 263,724553 | N |
| A becsült értékek ferdesége: | 0,49453691 | |
| A becsült értékek csúcsossága: | 1,153008 | |

Tehát a hallgatók a harcsa súlyát jelentős szórással túlbecsülték, a ferdeség a nagy értékek irányába nyúló aszimmetrikus eloszlást jelez, az eloszlás a normális eloszláshoz viszonyítva csúcsos eloszlás.

| 75 %-os felső kvantilis, 0,75*55=41,25 | Hisztogram |
|---|---|



# Az óriás harcsa becsült súlya, 3. oldal

| Valószínűségi változó, N | Valószínűség | Relatív valószínűség |
|---|---|---|
| 180 | 1 | 0,0182 |
| 200 | 2 | 0,0364 |
| 200 | 3 | 0,0545 |
| 200 | 4 | 0,0727 |
| 200 | 5 | 0,0909 |
| 250 | 6 | 0,1091 |
| 300 | 7 | 0,1273 |
| 300 | 8 | 0,1455 |
| 350 | 9 | 0,1636 |
| 400 | 10 | 0,1818 |
| 400 | 11 | 0,2000 |
| 450 | 12 | 0,2182 |
| 500 | 13 | 0,2364 |
| 500 | 14 | 0,2545 |
| 500 | 15 | 0,2727 |
| 500 | 16 | 0,2909 |
| 500 | 17 | 0,3091 |
| 500 | 18 | 0,3273 |
| 540 | 19 | 0,3455 |
| 540 | 20 | 0,3636 |
| 540 | 21 | 0,3818 |
| 570 | 22 | 0,4000 |
| 600 | 23 | 0,4182 |
| 600 | 24 | 0,4364 |
| 600 | 25 | 0,4545 |
| 630 | 26 | 0,4727 |
| 650 | 27 | 0,4909 |

Várhatóérték- 1,96 * szórás: 123,1 N

5 %-os alsó küszöb valószínűsége: 0,05*55=2,75

Hisztogram

Az 5 %-os alsó küszöb valószínűségi változója:
Átlag - 1,645 *szórás: 206,2 N
Ekkor a szórások tartományában a valószínűségek 90 %-a található.

Várhatóérték - egyszeres szórás: 376,3 N

25 %-os alsó kvantilis: 500 N
és valószínűsége: 0,25*55=13,75

Hisztogram

Módusz, a lognormális eloszlás legnagyobb gyakoriságához tartozó valószínűségi változó: 455 N
Ez valamivel több, mint az óriás harcsa tényleges, mért súlya (451,26 N).

Medián, lognormális eloszlás esetén: 556 N

A becsült értékek várhatóértéke: 640 N

A becsült értékek szórása: 263,7 N

# Az óriás harcsa becsült súlya, 4. oldal

| Valószínűségi változó , N | Valószínűség | Relatív valószínűség |
|---|---|---|
| 650 | 28 | 0,5091 |
| 650 | 29 | 0,5273 |
| 660 | 30 | 0,5455 |
| 700 | 31 | 0,5636 |
| 700 | 32 | 0,5818 |
| 700 | 33 | 0,6000 |
| 700 | 34 | 0,6182 |
| 700 | 35 | 0,6364 |
| 720 | 36 | 0,6545 |
| 750 | 37 | 0,6727 |
| 750 | 38 | 0,6909 |
| 780 | 39 | 0,7091 |
| 800 | 40 | 0,7273 |
| 800 | 41 | 0,7455 |
| 800 | 42 | 0,7636 |
| 800 | 43 | 0,7818 |
| 800 | 44 | 0,8000 |
| 800 | 45 | 0,8182 |
| 800 | 46 | 0,8364 |
| 810 | 47 | 0,8545 |
| 850 | 48 | 0,8727 |
| 870 | 49 | 0,8909 |
| 950 | 50 | 0,9091 |
| 1000 | 51 | 0,9273 |
| 1000 | 52 | 0,9455 |
| 1100 | 53 | 0,9636 |
| 1200 | 54 | 0,9818 |
| 1500 | 55 | 1,0000 |

**További matematikai statisztikai jellemzők**

A becsült értékek ferdesége: 0,495

A becsült értékek csúcsossága: 1,153

Hisztogram

**55 főiskolai hallgató fénykép után megbecsülte az óriás harcsa súlyát. Ezen az oldalon a becslés matematikai statisztikai feldolgozása található. A hisztogramot és a közelítő normális, illetve lognormális eloszlások gyakoriságfüggvényeit négy ábrán mutatjuk be.**

75 %-os alsó kvantilis: 800 N
és valószínűsége. 0,75*55=41,25

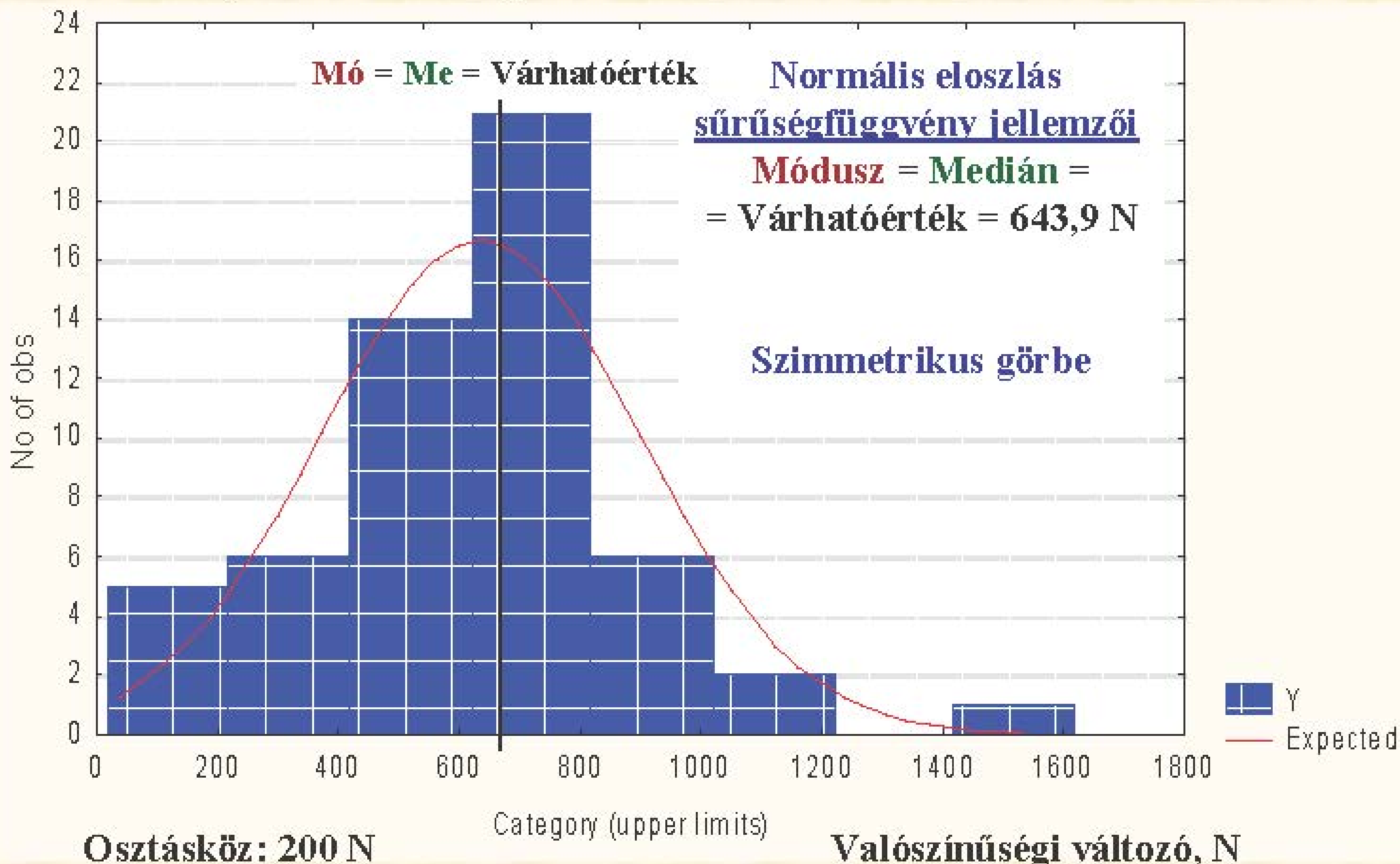
Hisztogram

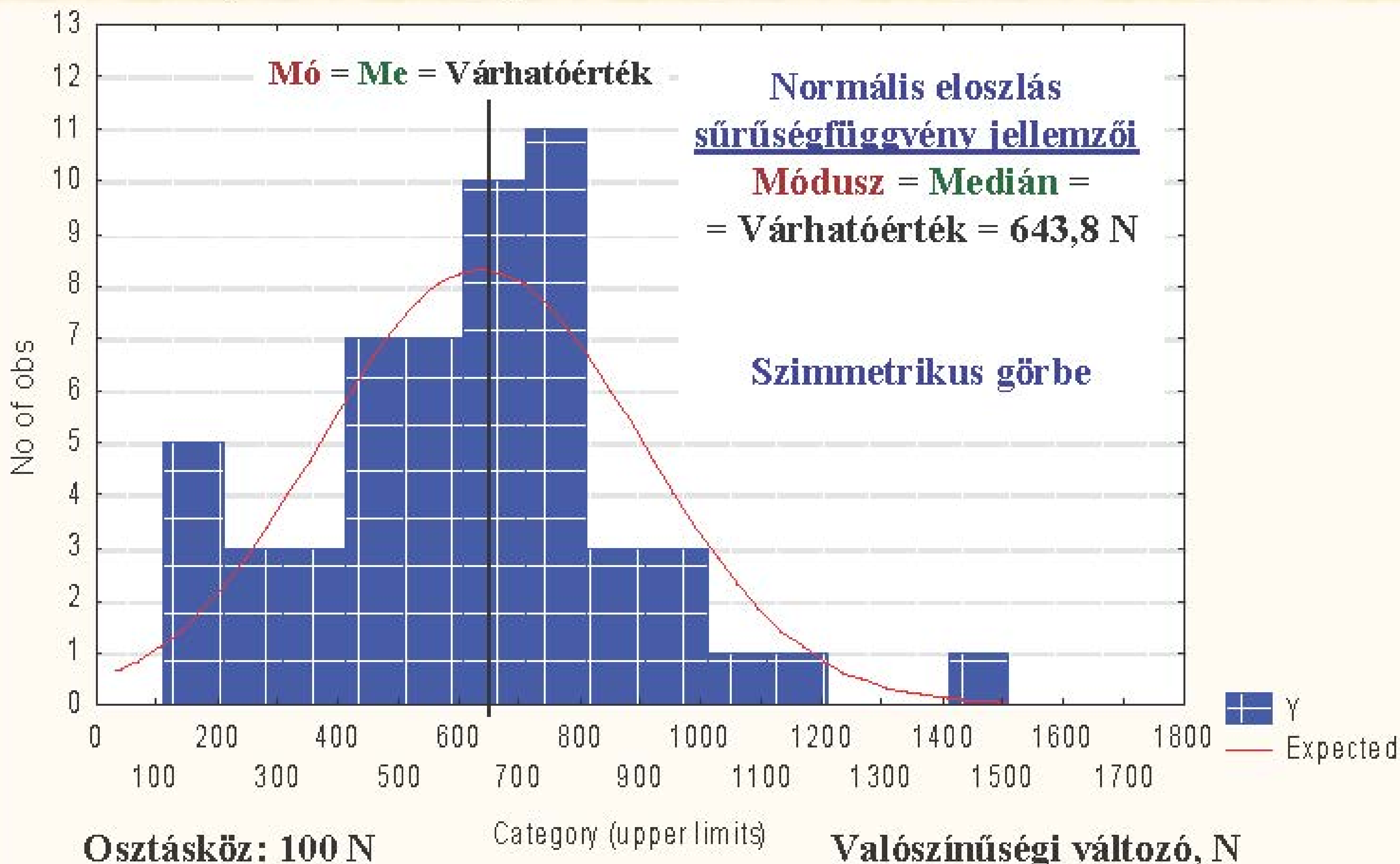
Normális eloszlás esetén
az egyszeres szórások tartományában a valószínűségek 68,27 %-a,
az 1,96-szoros szórások tartományában a valószínűségek 95 %-a található.

Várhatóérték + egyszeres szórás: 903,7 N

Várhatóérték + 1,96* szórás: 1156,9 N

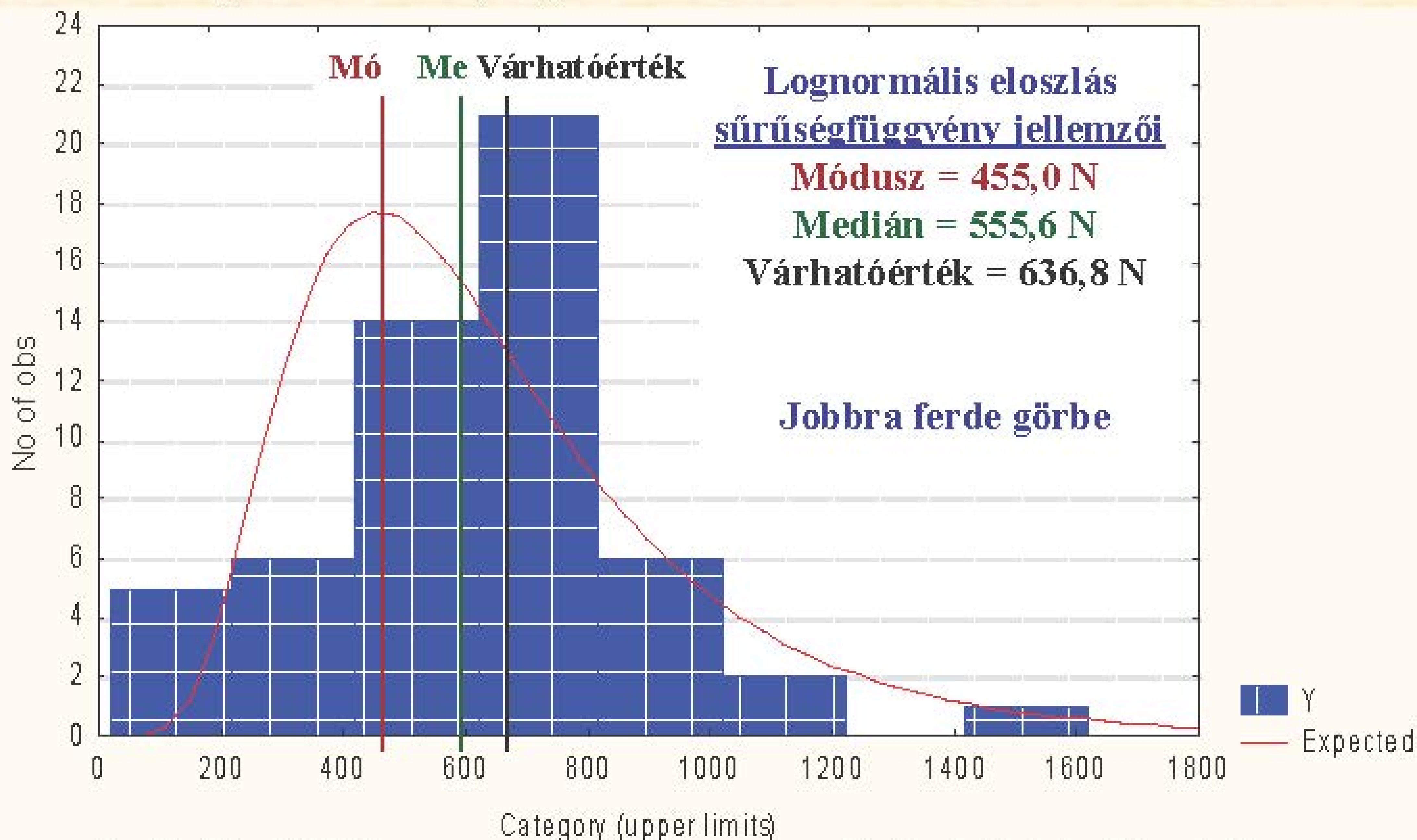
# Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje (szimmetrikus) *normális eloszlás* feltételezésével



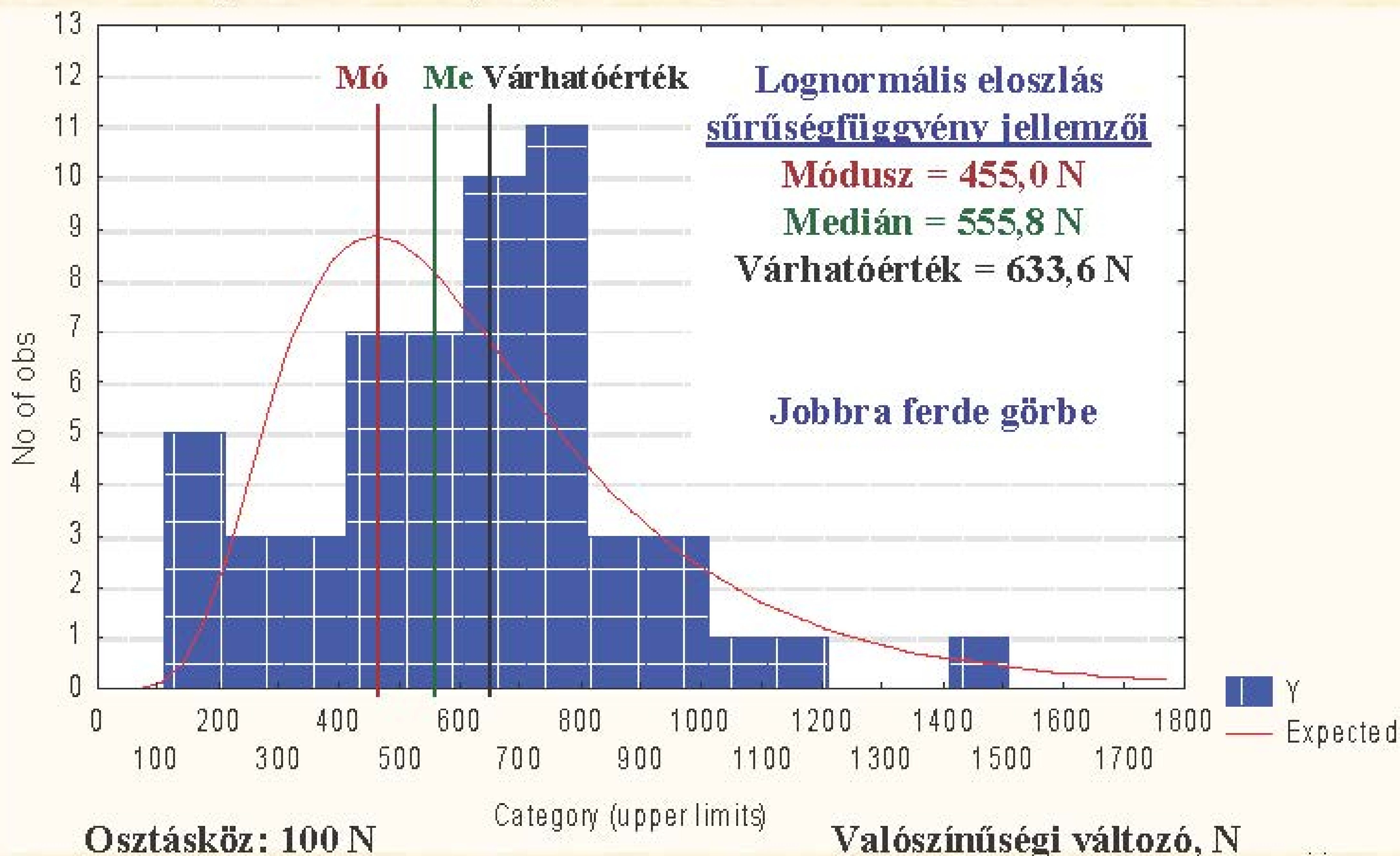


Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje
(szimmetrikus) *normális eloszlás* feltételezésével
Mó = Me = Várhatóérték
Normális eloszlás
sűrűségfüggvény jellemzői
Módusz = Medián =
= Várhatóérték = 643,8 N
Szimmetrikus görbe
No of obs
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
0 200 400 600 800 1000 1200 1400 1600 1800
100 300 500 700 900 1100 1300 1500 1700
Category (upper limits)
Y
Expected
Osztásköz: 100 N
Valószínűségi változó, N

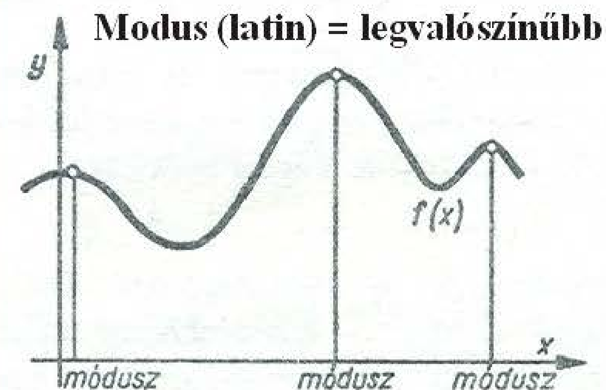
# Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje (jobbra ferde) *lognormális eloszlás* feltételezésével



# Az óriás harcsa súlya valószínűségének gyakorisági görbéje (jobbra ferde) *lognormális eloszlás* feltételezésével



# Néhány fogalom (4)



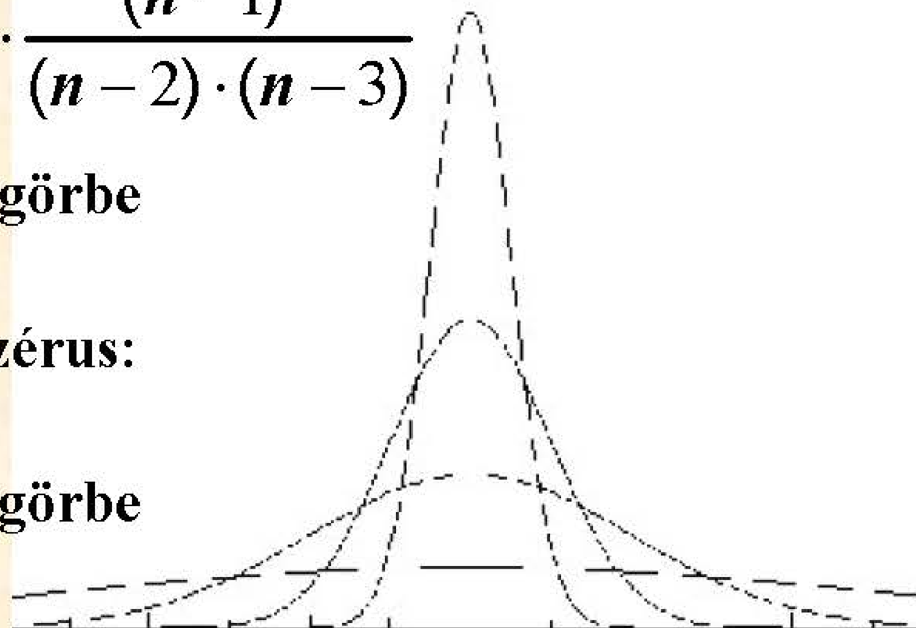

**Módusz:** A környezetében a legnagyobb (relatív) gyakorisághoz tartozó valószínűségi változó, magyarán a (relatív) ***gyakorisági görbe csúcsához tartozó abszcissza érték***, amelyből akár több is lehet.

**Medián** (latin = középső): A $p = 0{,}5$ értékhez tartozó kvantilis. Mindig a módusz és az átlag (várhatóérték) közé esik. A kilógó adatokkal szembeni kis érzékenysége miatt jobban jellemzi a ***nem normális eloszlásokat***, mint az átlag vagy a várhatóérték.

**Kvantilis:** Az a valószínűségi változó, amely adott arányban osztja fel a (relatív) gyakorisági görbe alatti területet, vagy a rendezett mintát stb.

**Lapultsági együttható** (vagy nevezik **csúcsossági együtthatónak** is): Szimmetrikus gyakorisági görbe esetén a normál eloszlás alakjától való eltérést fejezi ki.

$$\gamma_{kurtosis} = \frac{n \cdot (n-1)}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\bar{x} - x_i}{s} \right)^4 - 3 \cdot \frac{(n-1)^2}{(n-2)\cdot(n-3)}$$



A normális eloszlásénál **laposabb** gyakorisági görbe lapultsági együtthatója negatív szám: $\gamma_{\text{kurtosis}} < 0$.

A **normális eloszlás** lapultsági együtthatója zérus: $\gamma_{\text{kurtosis}} = 0$.

A normális eloszlásénál **csúcsosabb** gyakorisági görbe lapultsági együtthatója pozitív szám: $\gamma_{\text{kurtosis}} > 0$.

## Néhány fogalom (5)

**Szimmetrikus eloszlás: Eloszlás, amelynek a *ferdeségi együtthatója zérus*: $\gamma_{skewness} = 0$.**

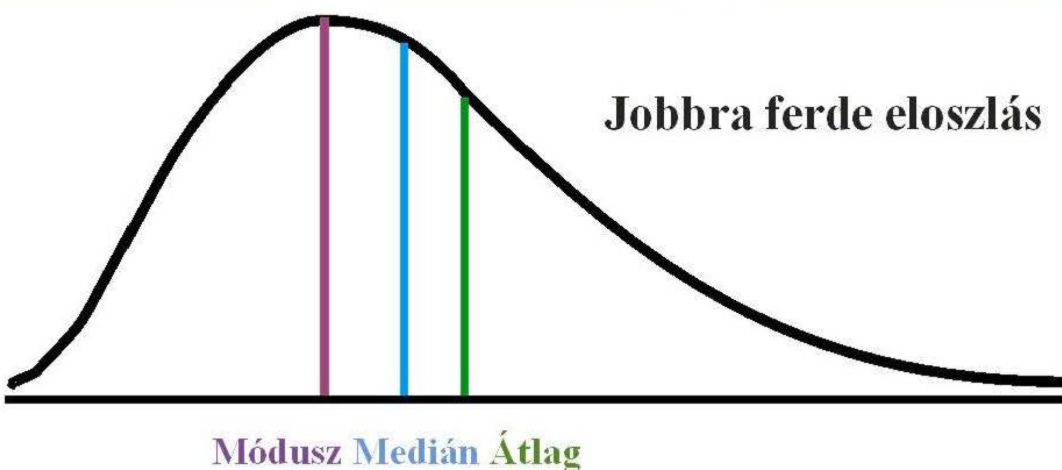
**Ferdeség (skewness** ejtsd: szkjunesz**): Jobbra vagy balra ferde eloszlás tulajdonsága.**

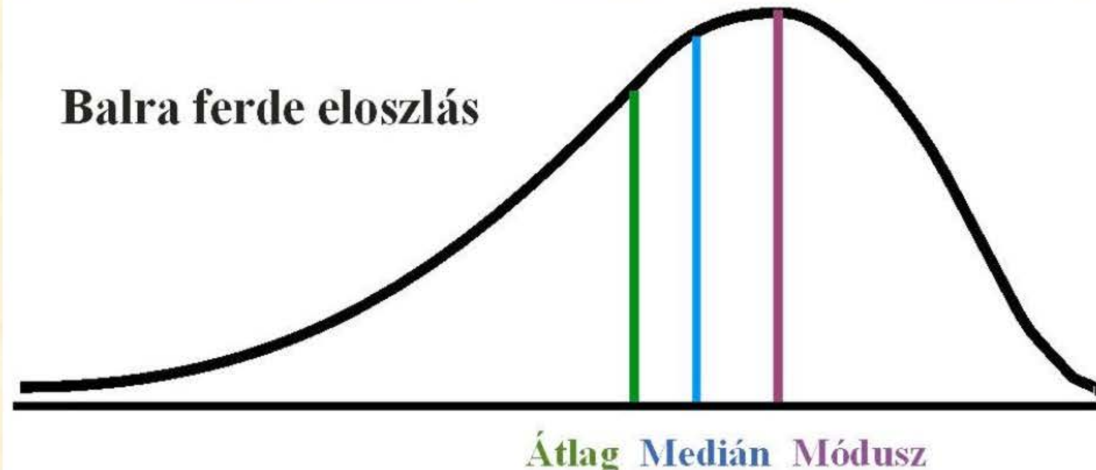
**Ferdeségi együttható:**

$$\gamma_{skewness} = \frac{n}{(n-1)\cdot(n-2)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\bar{x} - x_i}{s} \right)^3$$

**Jobbra ferde eloszlás: Ha az eloszlás gyakorisági görbéje hosszan *jobbra elnyúlik*, akkor azt mondjuk, hogy jobbra dől, ekkor *ferdeségi együtthatója pozitív szám:* $\gamma_{skewness} > 0$. (Általában ilyen a kisebb szilárdságú anyagok szilárdsági eloszlása.)**

**Balra ferde eloszlás: Ha az eloszlás gyakorisági görbéje hosszan *balra elnyúlik*, akkor azt mondjuk, hogy balra dől, ekkor *ferdeségi együtthatója negatív* szám: $\gamma_{skewness} < 0$. (Általában ilyen a nagyobb szilárdságú anyagok szilárdsági eloszlása.)**

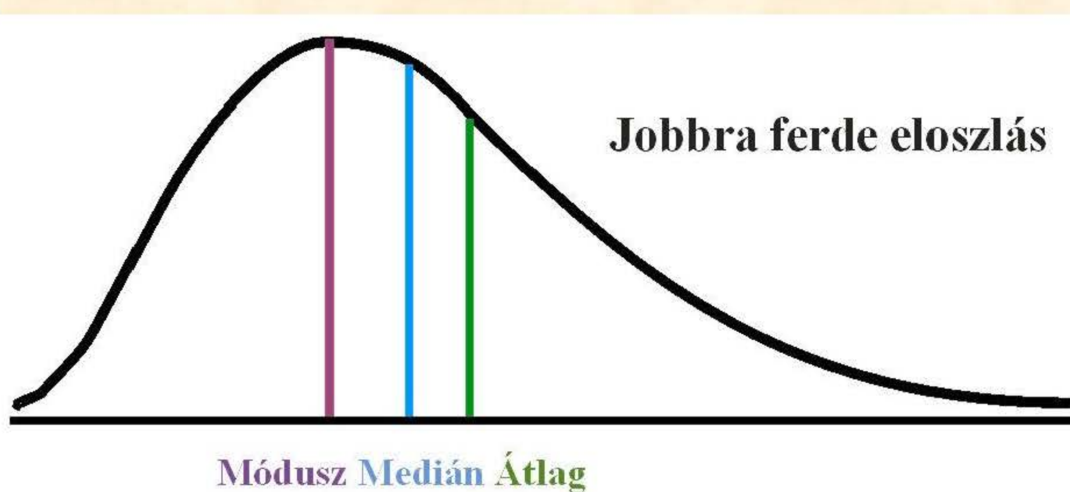


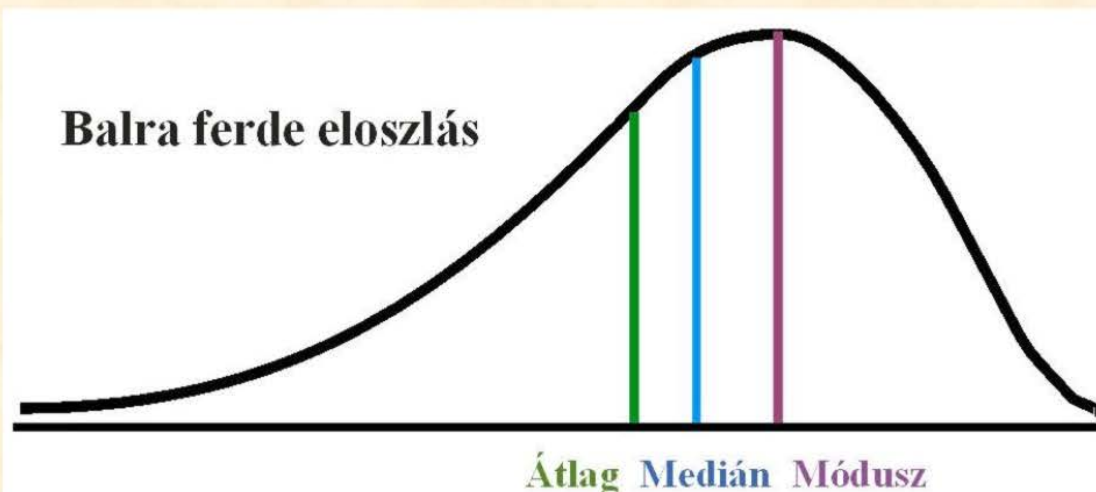



## Néhány fogalom (6)

**Módusz – medián – átlag (várhatóérték) viszonya *ferde eloszlás* esetén:**

- **Ferde eloszlás esetén a medián (középső valószínűségi változó) a gyakorisági görbe csúcsától – a módusztól – a ferdeség irányába esik.**
- **A medián mindig a módusz és a számtani átlag (várhatóérték) közé esik.**
- **Jobbra ferde eloszlás esetén a számtani átlag (várhatóérték) nagyobb, mint a medián (*Me*): $m > Me$**
- **Balra ferde eloszlás esetén a számtani átlag (várhatóérték) kisebb, mint a medián (*Me*): $m < Me$**



**Magyarországon 1980-2002 között, az MSZ 4720-2:1980 szabvány szerint a beton nyomószilárdságának jellemző értékét (küszöbértékét, $R_k$) a beton nyomószilárdsági eloszlása ferdeségének feltételezésével (*k* tényező) számítottuk ki.**

3.5.2. A nyomószilárdság ellenőrzésénél a vizsgálati eredmények $R_k$ jellemző értékét az

$$R_k = R_m - k \cdot t \cdot s$$

Szórás

*Student* tényező

kifejezéssel kell meghatározni, ahol

$R_m$ a vizsgálati eredmények átlaga,

k a szilárdság eloszlásának típusát figyelembevevő, a vizsgálati eredmények átlagától függő tényező, mely az 1. táblázatból vehető.

Számítógép alkalmazása esetén k értékét az alábbi kifejezésből kell meghatározni:

$$k = 0{,}540 + 0{,}1027 \sqrt{R_m}$$

ahol $R_m$ értékét $N/mm^2$ dimenzióban kell behelyettesíteni.

**A k tényező értékei**

1. táblázat

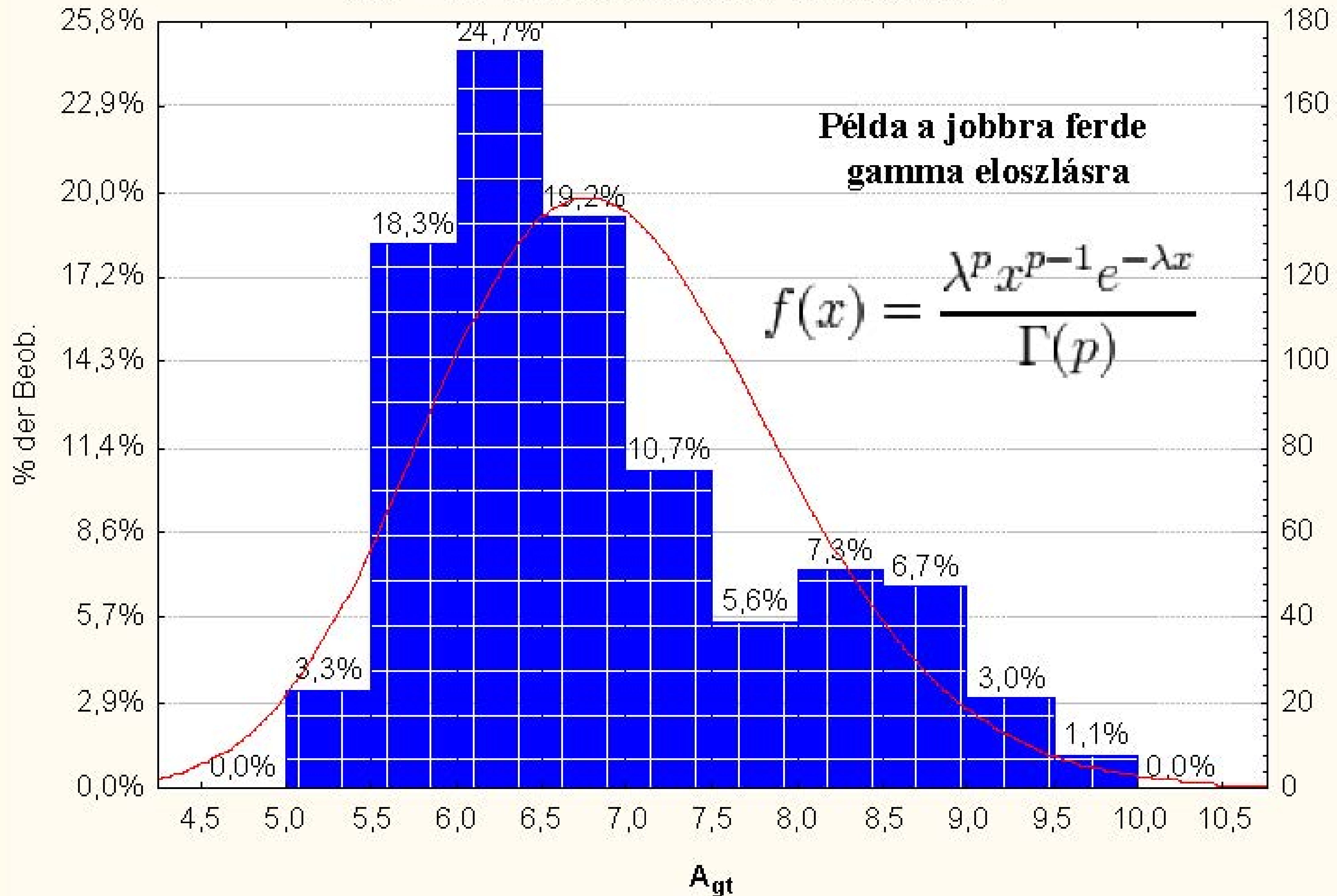
| | Jobbra ferde | | | | Szimmetrikus | Balra ferde | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_m$ $N/mm^2$ | 5 | 7 | 10 | 14 | 20 | 28 | 40 | 50 | 56 |
| k | 0,77 | 0,81 | 0,87 | 0,92 | 1,00 | 1,08 | 1,19 | 1,27 | 1,31 |

*Megjegyzés:* A táblázatban nem szereplő közbenső értékek arányos közbeiktatással határozhatók meg.

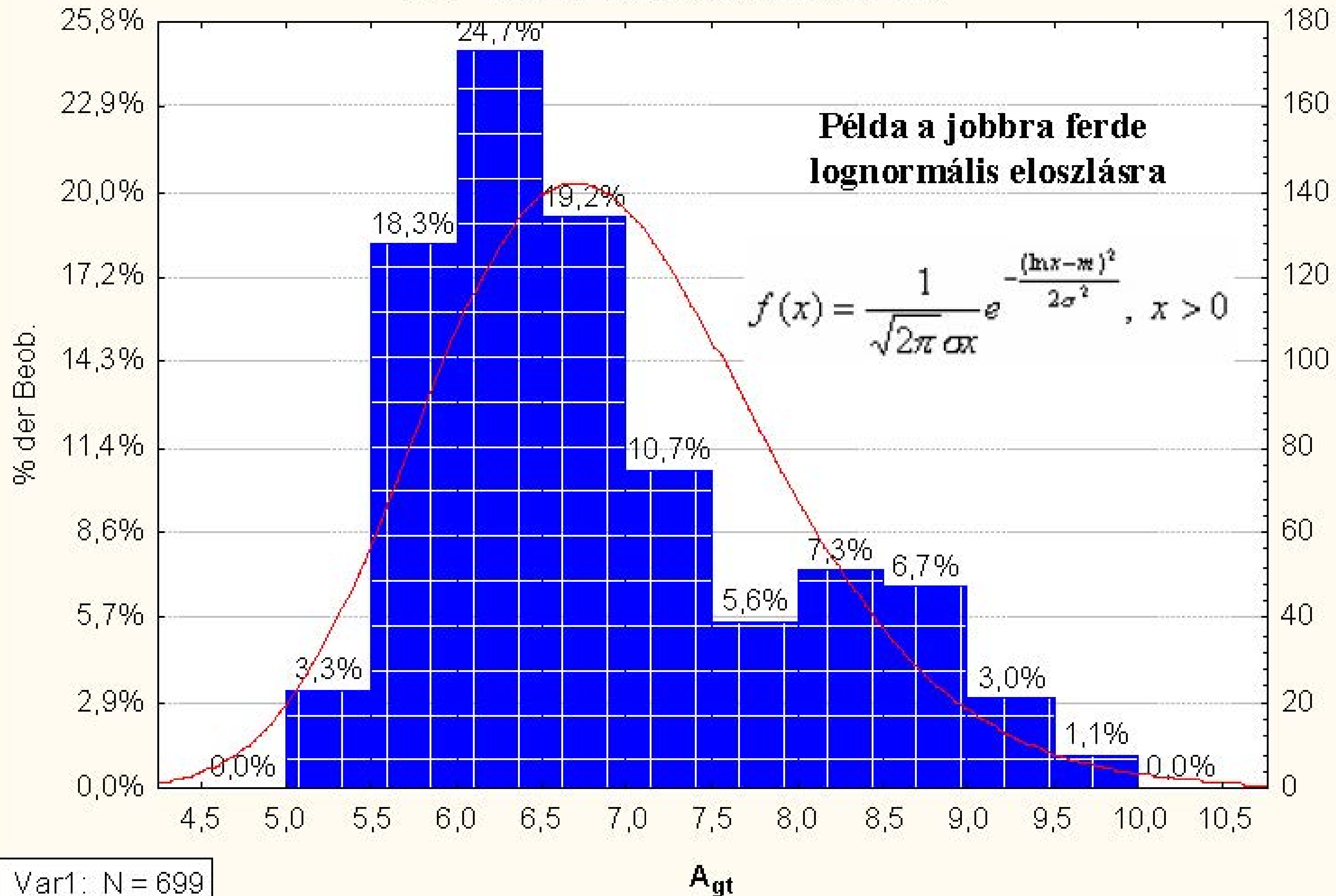
# Számpélda a vizsgálati eredmények eloszlása ferdeségének figyelembevételére a $k$ tényezővel

| Beton próbatestek vizsgálati eredménye | | | |
|---|---|---|---|
| Nyomószilárdság $N/mm^2$ | Értékelés a régi, ma már érvénytelen MSZ 4719:1982 és MSZ 4720/2:1980 szabvány alapján | | |
| 32,8 | | | |
| 35,1 | Eloszlás tényező: | $k = 1{,}125$ | |
| 31,9 | Student tényező: | $t = 2{,}015$ | |
| 34,2 | $k \cdot t \cdot s$ szorzat = | 5,1 | |
| 28,7 | Jellemző érték: $R_k =$ | | |
| 31,7 | $= R_m - k \cdot t \cdot s = 27{,}3\ N/mm^2$ | | |
| $R_m =$ 32,4 átlag | Megfelel, ha a megkövetelt minősítési érték: $R_{k,nom} = 25\ N/mm^2$ | | |
| $s =$ 2,24 szórás | | | |

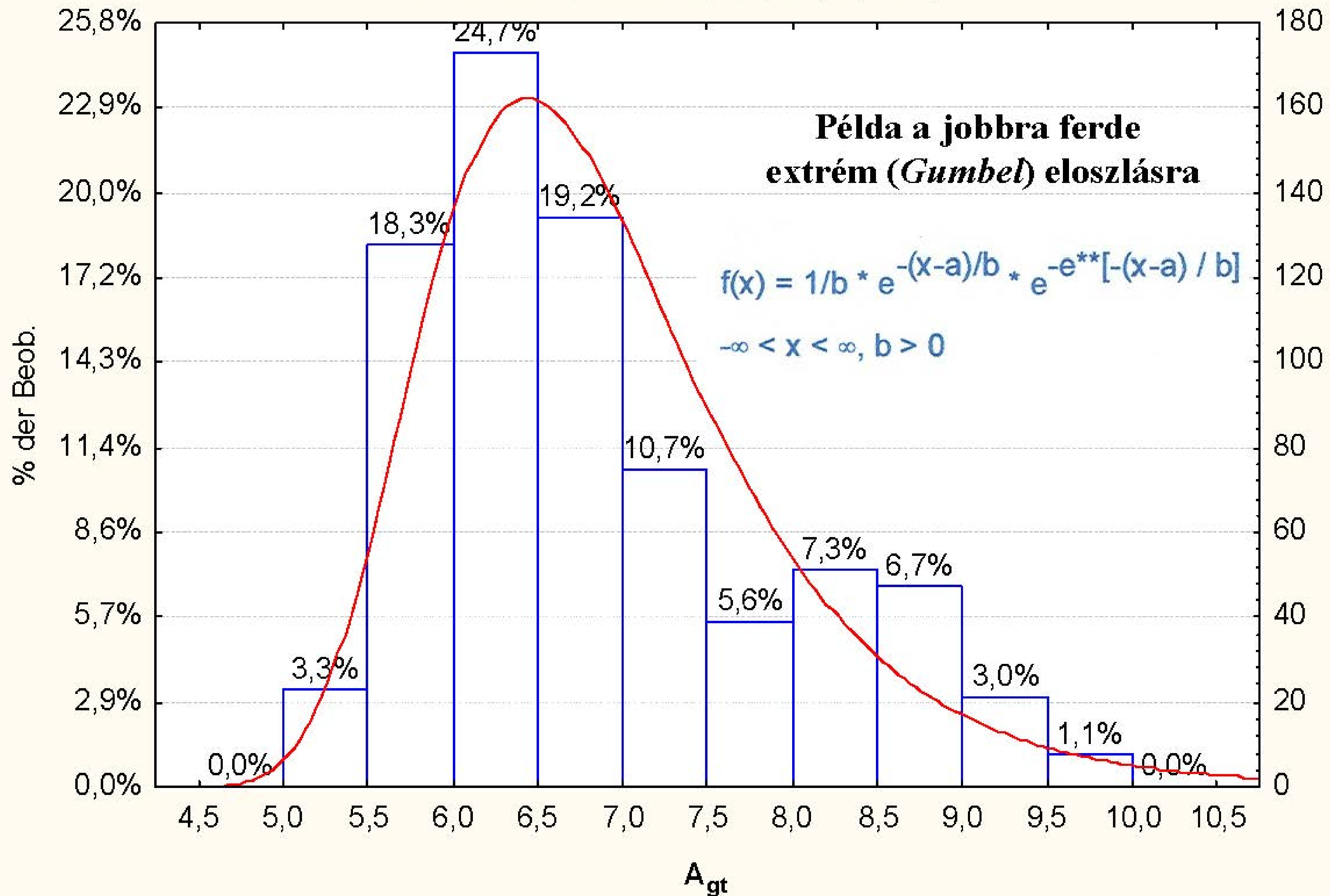
A példa beli vizsgálati eredmények eloszlása balra (a kisebb szilárdságok tartománya felé) ferde.

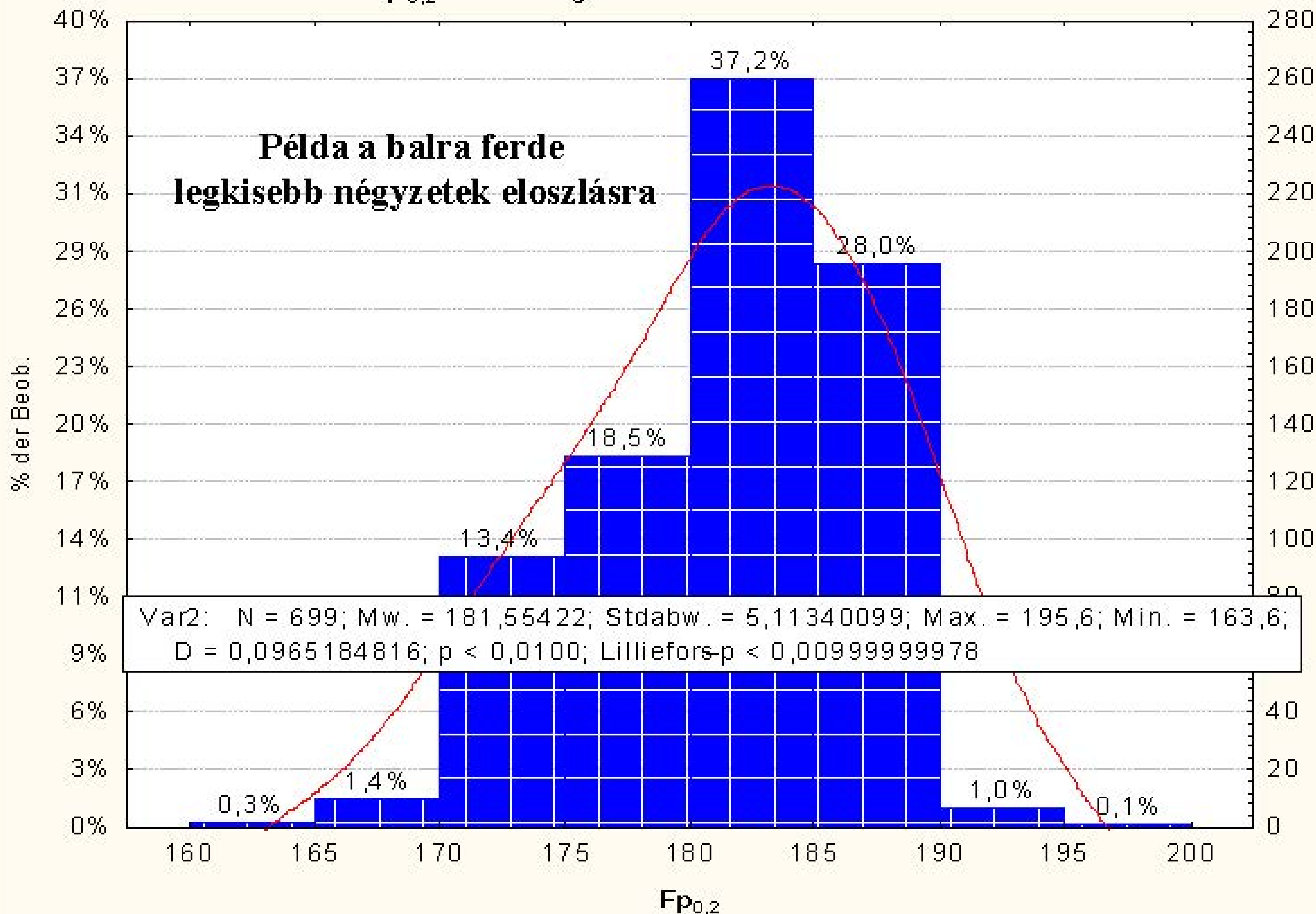


Histogramm (Tabelle2 in Arbeitsmappe1.stw 699v*699c)
Var1 = 699*0,5*gamma(x/0,1494; 46,2111)/0,1494
Példa a jobbra ferde gamma eloszlásra
$f(x) = \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)}$
% der Beob.
25,8%
22,9%
20,0%
17,2%
14,3%
11,4%
8,6%
5,7%
2,9%
0,0%
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0,0%
3,3%
18,3%
24,7%
19,2%
10,7%
5,6%
7,3%
6,7%
3,0%
1,1%
0,0%
4,5
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
7,5
8,0
8,5
9,0
9,5
10,0
10,5
$A_{gt}$



Histogramm (Tabelle2 in Arbeitsmappe1.stw 699v *699c)
Var1 = 699*0,5*lognorm(x; 1,921; 0,1456)
Példa a jobbra ferde lognormális eloszlásra
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x>0$
% der Beob.
25,8%
22,9%
20,0%
17,2%
14,3%
11,4%
8,6%
5,7%
2,9%
0,0%
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0,0%
3,3%
18,3%
24,7%
19,2%
10,7%
5,6%
7,3%
6,7%
3,0%
1,1%
0,0%
4,5
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
7,5
8,0
8,5
9,0
9,5
10,0
10,5
$A_{gt}$
Var1: N = 699


Histogramm (Tabelle2 in Arbeitsmappe1.stw 699v*699c)
Var1 = 699*0,5*extreme(x; 6,426; 0,7925)
Példa a jobbra ferde
extrém (Gumbel) eloszlásra
f(x) = 1/b * e-(x-a)/b * e-e**[-(x-a) / b]
-∞ < x < ∞, b > 0
% der Beob.
25,8%
22,9%
20,0%
17,2%
14,3%
11,4%
8,6%
5,7%
2,9%
0,0%
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0,0%
3,3%
18,3%
24,7%
19,2%
10,7%
5,6%
7,3%
6,7%
3,0%
1,1%
0,0%
4,5
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
7,5
8,0
8,5
9,0
9,5
10,0
10,5
Agt



Histogramm (Tabelle2 in Arbeitsmappe1.stw 699v*699c)
Fp0,2 = Distanz-gewichtete kleinste Quadrate
Példa a balra ferde
legkisebb négyzetek eloszlásra
% der Beob.
Fp0,2
37,2%
28,0%
18,5%
13,4%
1,4%
0,3%
1,0%
0,1%
Var2: N = 699; Mw. = 181,55422; Stdabw. = 5,11340099; Max. = 195,6; Min. = 163,6;
D = 0,0965184816; p < 0,0100; Lilliefors-p < 0,00999999978

# Regressziós közelítés a legkisebb hibanégyzet összegek módszerével

## Egyenes együtthatóinak kétismeretlenes egyenletrendszere

$$y = a * x + b$$

← **Ez a függvény alak**

**Elnevezések:**

$(y_i - y)$ = hiba

$(y_i - y)^2$ = hibanégyzet

$\Sigma(y_i - y)^2$ = hibanégyzet összeg

$$F = \sum (y_i - y)^2 = \sum (y_i - a * x_i - b)^2 \Rightarrow \min$$

**Módszer neve ezért:**

**Legkisebb hibanégyzet összegek módszere**

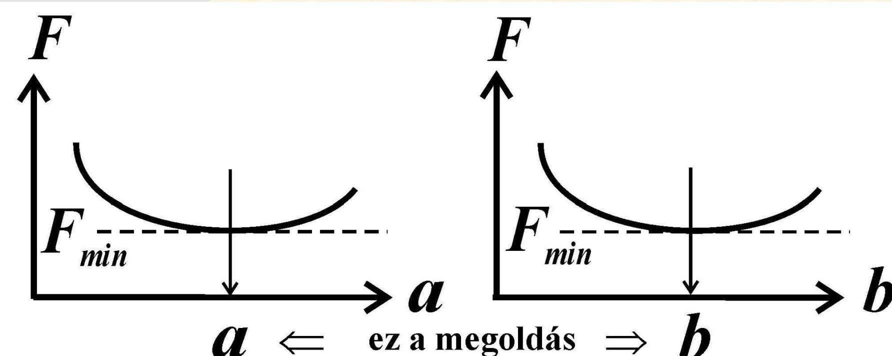
$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 * \sum (y_i - a * x_i - b) * x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 * \sum (y_i - a * x_i - b) = 0$$

**Az *F* hibanégyzet összeg függvénynek ott van szélső értéke, esetünkben minimuma, ahol a deriváltjainak (∂*F*/∂*a* és ∂*F*/∂*b*) az értéke zérus (érintője vízszintes):**

$$\sum x_i * y_i - a * \sum x_i^2 - b * \sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - a * \sum x_i - b * n = 0$$



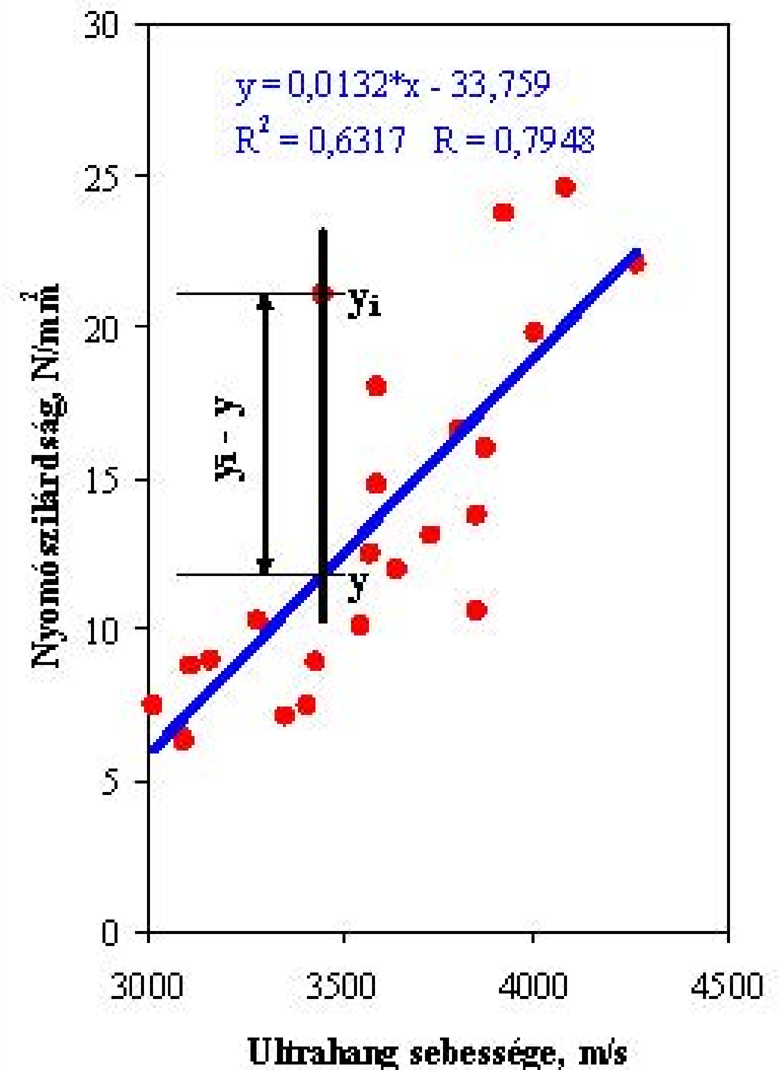
# Regressziós közelítés egyenessel

$$D = \begin{vmatrix} \sum x^2 & \sum x \\ \sum x & n \end{vmatrix}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum x*y & \sum x \\ \sum y & n \end{vmatrix}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum x^2 & \sum x*y \\ \sum x & \sum y \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{D_a}{D} \qquad b = \frac{D_b}{D}$$




**Meghatározandó részmennyiségek:** $\Sigma x_i$ $\Sigma x_i^2$ $\Sigma y_i$ $\Sigma x_i * y_i$

**Másodfokú parabola együtthatóinak háromismeretlenes egyenletrendszere**

$$y = a * x^2 + b * x + c$$

**← Ez a közelítő függvény alakja**

$$F = \sum \left(y_i - y\right)^2 = \sum \left(y_i - a * x_i^{\,2} - b * x_i - c\right)^2 \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 * \sum \left(y_i - a * x_i^{\,2} - b * x_i - c\right) * x_i^{\,2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 * \sum \left(y_i - a * x_i^{\,2} - b * x_i - c\right) * x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -2 * \sum \left(y_i - a * x_i^{\,2} - b * x_i - c\right) = 0$$

# Regressziós közelítés másodfokú parabolával

$$\sum x_i^2 * y_i - a * \sum x_i^4 - b * \sum x_i^3 - c * \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i * y_i - a * \sum x_i^3 - b * \sum x_i^2 - c * \sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - a * \sum x_i^2 - b * \sum x_i - c * n = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum x_i^2 * y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i * y_i & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum y_i & \sum x_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 * y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i * y_i & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum y_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_c = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 * y_i \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i * y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{D_a}{D} \qquad b = \frac{D_b}{D} \qquad c = \frac{D_c}{D}$$

Meghatározandó részmennyiségek: $\Sigma x_i$ $\Sigma x_i^2$ $\Sigma x_i^3$ $\Sigma x_i^4$
$\Sigma y_i$ $\Sigma x_i * y_i$ $\Sigma x_i^2 * y_i$

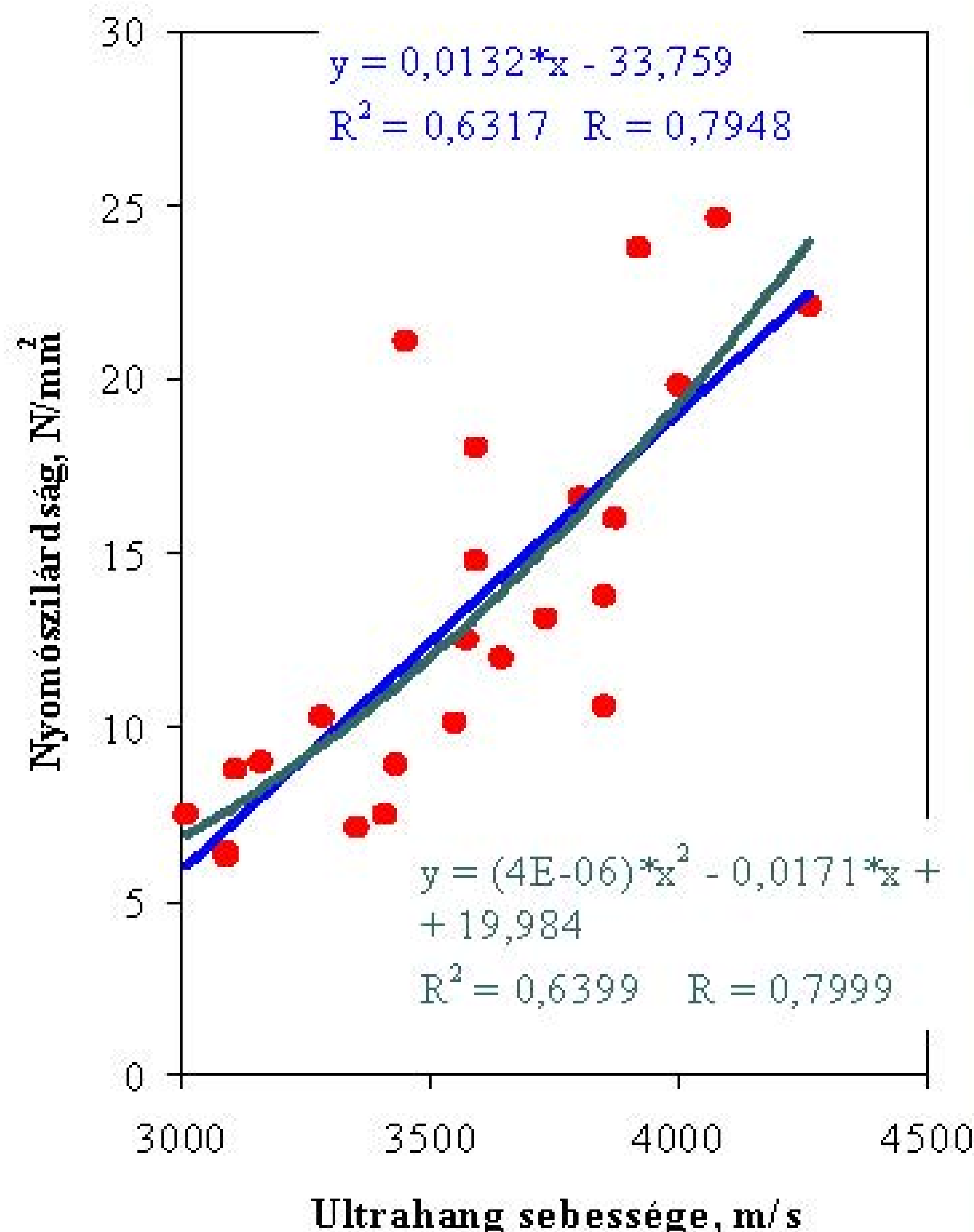
**A közelítés pontosságáról a korrelációs együttható (egyenes esetén), illetve a korrelációs index (görbe esetén) ad felvilágositást.**

**Mennél pontosabb a közelítés, az *R* korrelációs együttható, illetve index annál nagyobb és értéke mind inkább tart az 1,0-hez:**

$$R \rightarrow 1{,}0$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - y)^2}{\sum \left( y_i - \frac{\sum y_i}{n} \right)^2}}$$

**A korrelációs együtthatót, illetve indexet az irodalomban *I*-vel is jelölik.**



# KÖSZÖNÖM A FIGYELMÜKET